

结论册：38 个常用结论

公众号：一数儿

目 录

函数

重要结论 3: 函数图象的对称轴和对称中心结论	001
重要结论 4: 双对称的周期结论	002
重要结论 5: 经典切线放缩不等式	003
二级结论 27: 常用泰勒公式	015

平面向量

重要结论 6: 向量中线定理	005
重要结论 7: 三点共线向量系数和结论	005
重要结论 8: 投影向量计算公式	005
重要结论 9: 重心坐标	006
二级结论 29: 极化恒等式	016

三角函数、解三角形

重要结论 10: 角平分线性质定理	006
重要结论 11: 三角形的内切圆半径公式	007
二级结论 28: 万能公式	016

数列

重要结论 12: 等差、等比数列的片段和性质	007
------------------------------	-----

立体几何

重要结论 13: 三垂线定理	008
二级结论 31: 正四面体外接球、内切球半径	017

解析几何

重要结论 14: 椭圆通径公式	008
重要结论 15: 双曲线通径公式	009
重要结论 17: 弦长公式	010

重要结论 18: 双曲线的焦点到渐近线距离结论 011

重要结论 19: 切线、切点弦统一结论 011

重要结论 20: 椭圆的中点弦斜率积结论 012

重要结论 21: 双曲线的中点弦斜率积结论 013

二级结论 32: 角版焦半径、焦点弦公式, 焦原三角形面积公式 018

二级结论 33: 原点三角形面积公式 020

二级结论 34: 椭圆的第三定义斜率积结论 020

二级结论 35: 双曲线第三定义斜率积结论 021

二级结论 36: 抛物线的垂直定点结论 022

二级结论 37: 以抛物线的焦点弦为直径的圆与准线相切 023

二级结论 38: 点乘双根法 024

概率统计

重要结论 22: 平均数、方差的性质 013

重要结论 23: 期望、方差的性质 014

重要结论 24: 超几何分布期望公式 015

不等式

二级结论 25: 糖水不等式 015

二级结论 26: 三元均值不等式 015

其它

重要结论 1: 子集个数结论 001

重要结论 2: 等比性质 001

重要结论 16: 韦达定理推论 010

二级结论 30: 重心等分面积结论 017

内容提要：

本书的解析中用到了一些常用的结论，放到解析里进行反复证明较为繁琐，故将其整理成到一起，形成了这本常用结论小册子。我们把结论分成了两类：一类是重要结论，这是必须掌握的；另一类是二级结论，可以选择性地掌握。

重要结论 1：（子集个数结论）设集合 A 有 $n(n \in \mathbf{N}^*)$ 个元素，则 A 的子集有 2^n 个，非空子集有 $2^n - 1$ 个，真子集有 $2^n - 1$ 个，非空真子集有 $2^n - 2$ 个。

证明： 设 A 的元素分别为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，集合 B 是集合 A 的子集，则要分析集合 B 有几种情况，可分步考虑 A 中的每个元素是否在 B 中，因为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 均可能在或不在 B 中，所以每个元素都有 2 种情况，由分步乘法计数原理，集合 B 有 $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$ 种情况，故 A 的子集有 2^n 个，去掉空集， A 的非空子集有 $2^n - 1$ 个，去掉 A 本身， A 的真子集有 $2^n - 1$ 个，去掉空集和 A 本身， A 的非空真子集有 $2^n - 2$ 个。

重要结论 2：（等比性质）设 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，且 $b + d \neq 0$ ，则 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ 。

证明： 设 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ ，则 $a = bk$ ， $c = dk$ ，

所以 $\frac{a+c}{b+d} = \frac{bk+dk}{b+d} = \frac{k(b+d)}{b+d} = k$ ，故 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ 。

重要结论 3：（函数图象的对称轴和对称中心结论）

①若 $f(x)$ 满足 $f(a+x) = f(b-x)$ ，则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称。

②若 $f(x)$ 满足 $f(a+x) + f(b-x) = c$ ，则 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2})$ 对称。

③若将上述①②中的 x 全部换成 $2x$ （或 $3x$ 等等），结论依然成立。

例如，若 $f(a+2x) = f(b-2x)$ ，则仍可得到 $f(x)$ 关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称。

证明： ①设 $P(x, f(x))$ 是函数 $f(x)$ 图象上任意一点，

则 P 关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 的对称点为 $P'(a+b-x, f(x))$,

如图 1, 要证结论成立, 只需证 P' 也在 $f(x)$ 的图象上, 即证 $f(x) = f(a+b-x)$,

在 $f(a+x) = f(b-x)$ 中将 x 换成 $x-a$ 可得 $f(a+(x-a)) = f(b-(x-a))$,

所以 $f(x) = f(a+b-x)$, 故 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称;

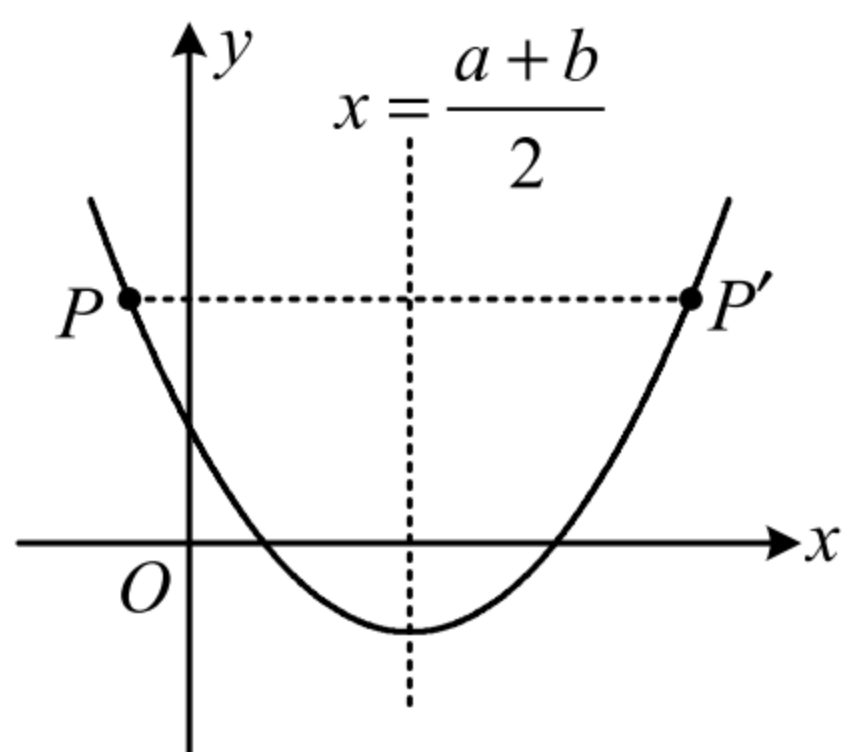


图1

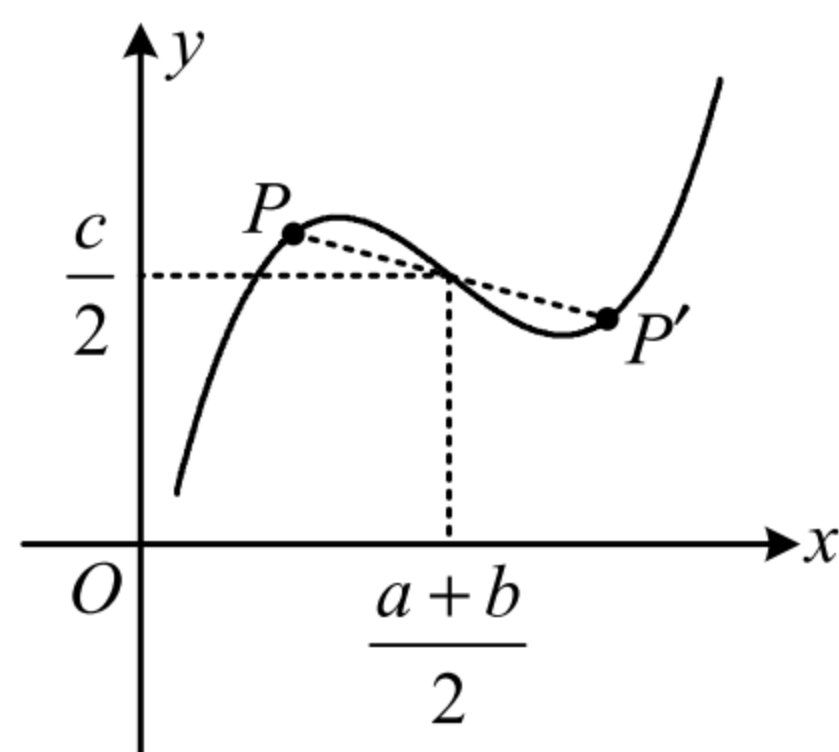


图2

②设 $P(x, f(x))$ 是函数 $f(x)$ 图象上任意一点,

则 P 关于 $(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2})$ 的对称点为 $P'(a+b-x, c-f(x))$,

如图 2, 要证结论成立, 只需证 P' 也在 $f(x)$ 的图象上,

即证 $c-f(x) = f(a+b-x)$, 也即证 $f(x) + f(a+b-x) = c$,

在 $f(a+x) + f(b-x) = c$ 中将 x 换成 $x-a$ 可得 $f(a+(x-a)) + f(b-(x-a)) = c$,

所以 $f(x) + f(a+b-x) = c$, 故 $f(x)$ 的图象关于 $(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2})$ 对称.

③以 $f(a+2x) = f(b-2x)$ 为例, 此式对任意的实数 x 都成立,

则将 x 换成 $\frac{x}{2}$ 可得 $f(a+x) = f(b-x)$, 所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称.

重要结论 4: (双对称的周期结论, 可借助三角函数辅助理解)

①若函数 $f(x)$ 有两条对称轴, 则 $f(x)$ 一定是周期函数, 周期为对称轴距离的 2 倍.

②若函数 $f(x)$ 有一条对称轴, 一个对称中心, 则 $f(x)$ 一定是周期函数, 周期为对称中心与对称轴之间距离的 4 倍.

③若函数 $f(x)$ 有在同一水平线上的两个对称中心，则 $f(x)$ 一定是周期函数，周期为对称中心之间距离的 2 倍.

证明：①设函数 $f(x)$ 的两条对称轴分别为 $x=a$ ， $x=b$ ，不妨假设 $b>a$ ，

$$\text{则} \begin{cases} f(2a+x)=f(-x) \\ f(2b+x)=f(-x) \end{cases}, \text{ 所以 } f(2a+x)=f(2b+x),$$

在上式中将 x 换成 $x-2a$ 可得 $f(x)=f(x+2b-2a)$ ，

所以 $f(x)$ 一定是周期函数，周期 $T=2b-2a$ ，周期为对称轴之间距离的 2 倍.

$$\text{②设函数 } f(x) \text{ 的对称轴为 } x=a, \text{ 对称中心为 } (b,c), \text{ 则 } \begin{cases} f(2a+x)-f(-x)=0 \\ f(2b+x)+f(-x)=2c \end{cases},$$

所以 $f(2a+x)+f(2b+x)=2c$ ，将 x 换成 $x-2a$ 可得 $f(x)+f(x+2b-2a)=2c$ ，

所以 $f(x+2b-2a)=-f(x)+2c$ (i)，

在式(i)中将 x 换成 $x+2b-2a$ 可得 $f(x+2b-2a+2b-2a)=-f(x+2b-2a)+2c$ ，

结合式(i)可得 $f(x+4b-4a)=-[-f(x)+2c]+2c=f(x)$ ，

所以函数 $f(x)$ 一定是周期函数，周期 $T=4b-4a$ ，

周期为对称轴与对称中心之间距离的 4 倍.

③设 $f(x)$ 的两个对称中心分别为 (a,m) ， (b,m) ，不妨假设 $b>a$ ，

$$\text{则} \begin{cases} f(2a+x)+f(-x)=2m \\ f(2b+x)+f(-x)=2m \end{cases}, \text{ 两式作差得: } f(2a+x)-f(2b+x)=0,$$

所以 $f(2a+x)=f(2b+x)$ ，将 x 换成 $x-2a$ 可得 $f(2a+x-2a)=f(2b+x-2a)$ ，

所以 $f(x)=f(x+2b-2a)$ ，故 $f(x)$ 为周期函数，周期为 $T=2b-2a$ ，

周期为两对称中心之间距离的 2 倍.

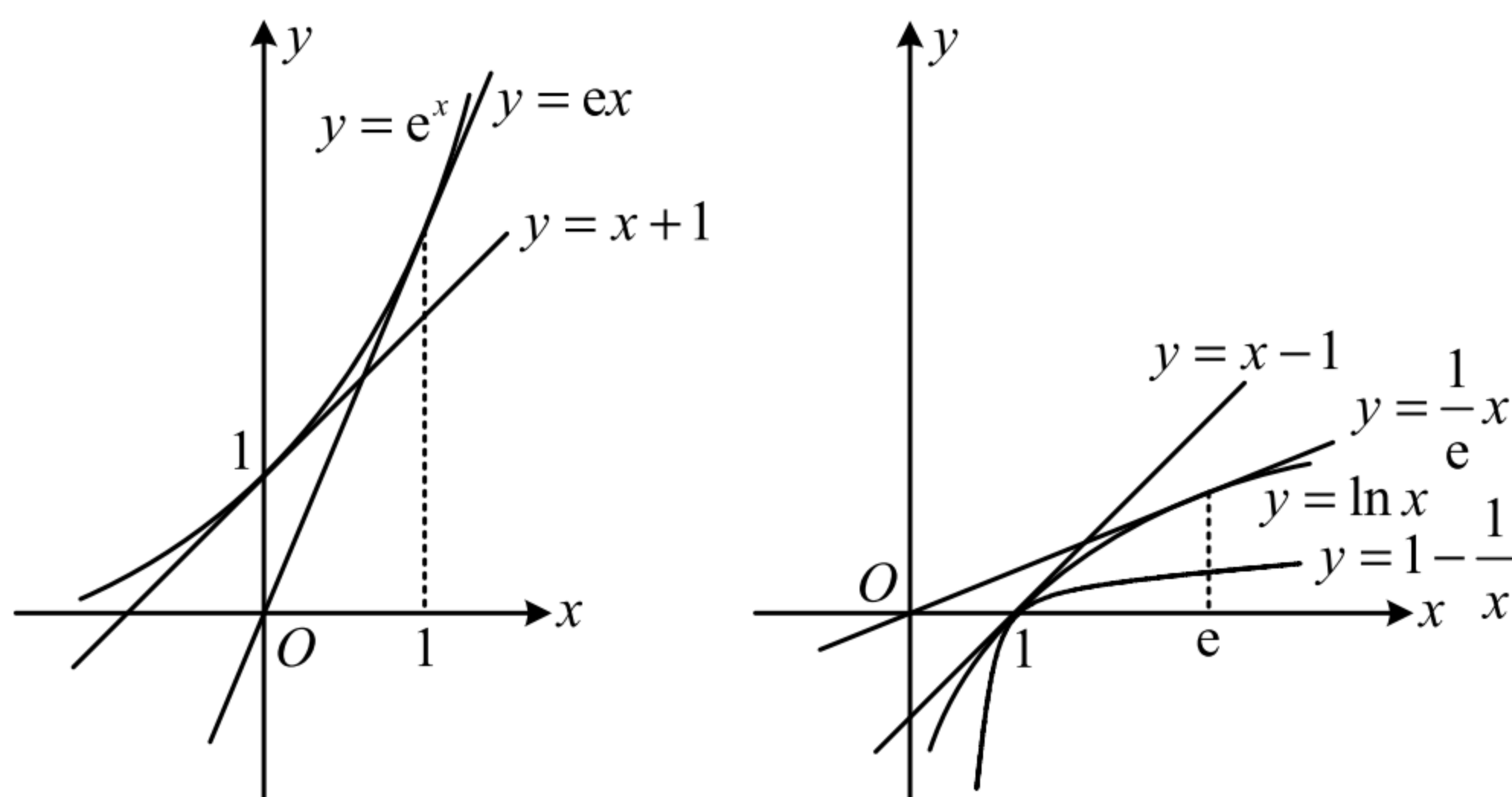
重要结论 5: (经典切线放缩不等式) ① $e^x \geq x+1$ ，当且仅当 $x=0$ 时取等号.

② $e^x \geq ex$ ，当且仅当 $x=1$ 时取等号.

③ $1-\frac{1}{x} \leq \ln x \leq x-1$ ，当且仅当 $x=1$ 时取等号.

④ $\ln x \leq \frac{x}{e}$ ，当且仅当 $x=e$ 时取等号.

上述不等式的图象特征如下面的两个图：



证明：①设 $f(x) = e^x - x - 1$, $x \in \mathbf{R}$, 则 $f'(x) = e^x - 1$, 所以 $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$,

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上 $\searrow$, 在 $(0, +\infty)$ 上 $\nearrow$,

所以 $f(x) \geq f(0) = 0$, 从而 $e^x - x - 1 \geq 0$, 故 $e^x \geq x + 1$, 取等条件是 $x = 0$.

②设 $g(x) = e^x - ex$, $x \in \mathbf{R}$, 则 $g'(x) = e^x - e$, 所以 $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$,

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$, 故 $g(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上 $\searrow$, 在 $(1, +\infty)$ 上 $\nearrow$,

所以 $g(x) \geq g(1) = 0$, 从而 $e^x - ex \geq 0$, 故 $e^x \geq ex$, 取等条件是 $x = 1$.

③设 $h(x) = \ln x - x + 1$, $x > 0$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$, 所以 $h'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$,

$h'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$, 故 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上 $\nearrow$, 在 $(1, +\infty)$ 上 $\searrow$,

所以 $h(x) \leq h(1) = 0$, 从而 $\ln x - x + 1 \leq 0$, 故 $\ln x \leq x - 1$, 取等条件是 $x = 1$,

在上式中将 x 换成 $\frac{1}{x}$ 可得 $\ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1$, 所以 $-\ln x \leq \frac{1}{x} - 1$, 故 $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$,

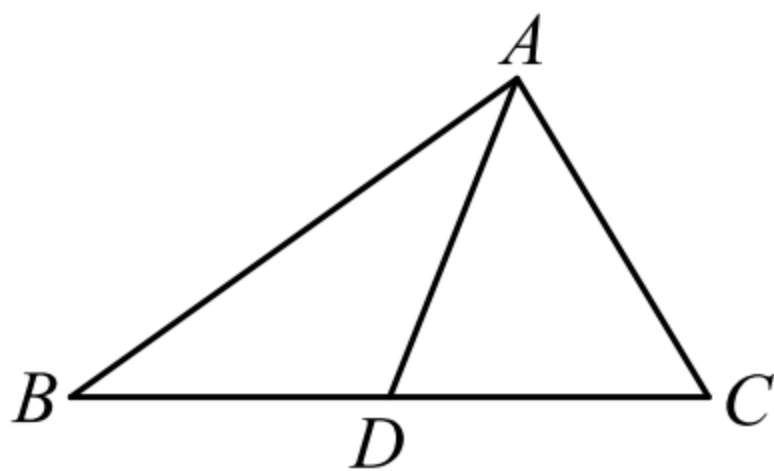
取等条件是 $\frac{1}{x} = 1$, 即 $x = 1$.

④设 $r(x) = \ln x - \frac{x}{e}$, $x > 0$, 则 $r'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = \frac{e-x}{ex}$, 所以 $r'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < e$,

$r'(x) < 0 \Leftrightarrow x > e$, 故 $r(x)$ 在 $(0, e)$ 上 $\nearrow$, 在 $(e, +\infty)$ 上 $\searrow$,

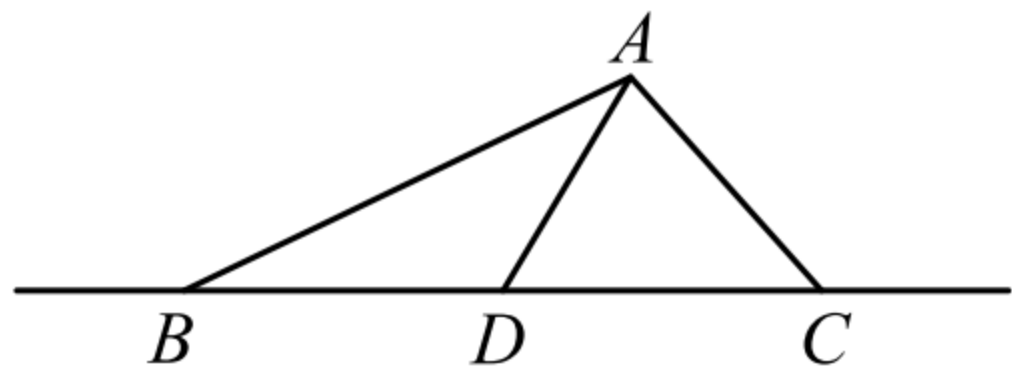
所以 $r(x) \leq r(e) = 0$, 从而 $\ln x - \frac{x}{e} \leq 0$, 故 $\ln x \leq \frac{x}{e}$, 取等条件是 $x = e$.

重要结论 6：（向量中线定理）如图，设 D 是 BC 中点，则 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.



证明： $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

重要结论 7：（三点共线向量系数和结论）如图，平面内 A, B, C 三点不共线，点 D 满足 $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} (\lambda, \mu \in \mathbf{R})$ ，则 B, C, D 三点共线的充要条件是 $\lambda + \mu = 1$.



证明：先看充分性. 当 $\lambda + \mu = 1$ 时， $\mu = 1 - \lambda$ ，

所以 $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB} + (1 - \lambda)\overrightarrow{AC} = \lambda(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}$ ，

从而 $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$ ，故 $\overrightarrow{CD} = \lambda\overrightarrow{CB}$ ，所以 B, C, D 三点共线，充分性成立；

再看必要性. 当 B, C, D 三点共线时，可设 $\overrightarrow{BD} = m\overrightarrow{BC}$ ，

所以 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + m(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = (1 - m)\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}$ ，

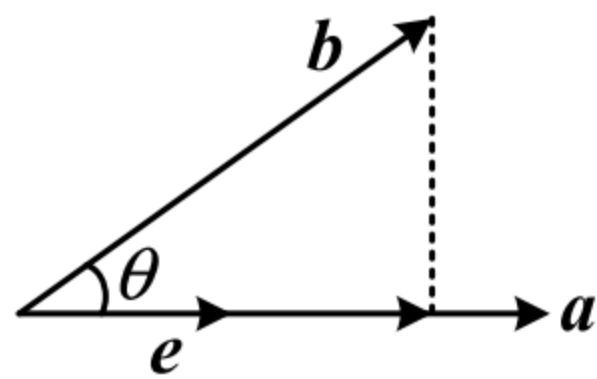
与 $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$ 对比可得 $\begin{cases} \lambda = 1 - m \\ \mu = m \end{cases}$ ，所以 $\lambda + \mu = 1 - m + m = 1$ ，必要性成立；

所以 B, C, D 三点共线的充要条件是 $\lambda + \mu = 1$.

重要结论 8：（投影向量计算公式）向量 b 在向量 a 上的投影向量为 $\frac{a \cdot b}{|a|^2}a$.

证明：如图，设 e 为与 a 同向的单位向量，则 b 在 a 上的投影向量为 $(|b|\cos\theta)e$ ，

由于 $e = \frac{a}{|a|}$ ，所以 $(|b|\cos\theta)e = (|b|\cos\theta)\frac{a}{|a|} = \frac{|b|\cos\theta}{|a|}a = \frac{|a| \cdot |b|\cos\theta}{|a|^2}a = \frac{a \cdot b}{|a|^2}a$.



重要结论 9：（重心坐标） $\triangle ABC$ 的顶点分别为 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ， $C(x_3, y_3)$ ，

则 $\triangle ABC$ 的重心 G 的坐标为 $(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3})$ 。这一结论可推广到空间中。

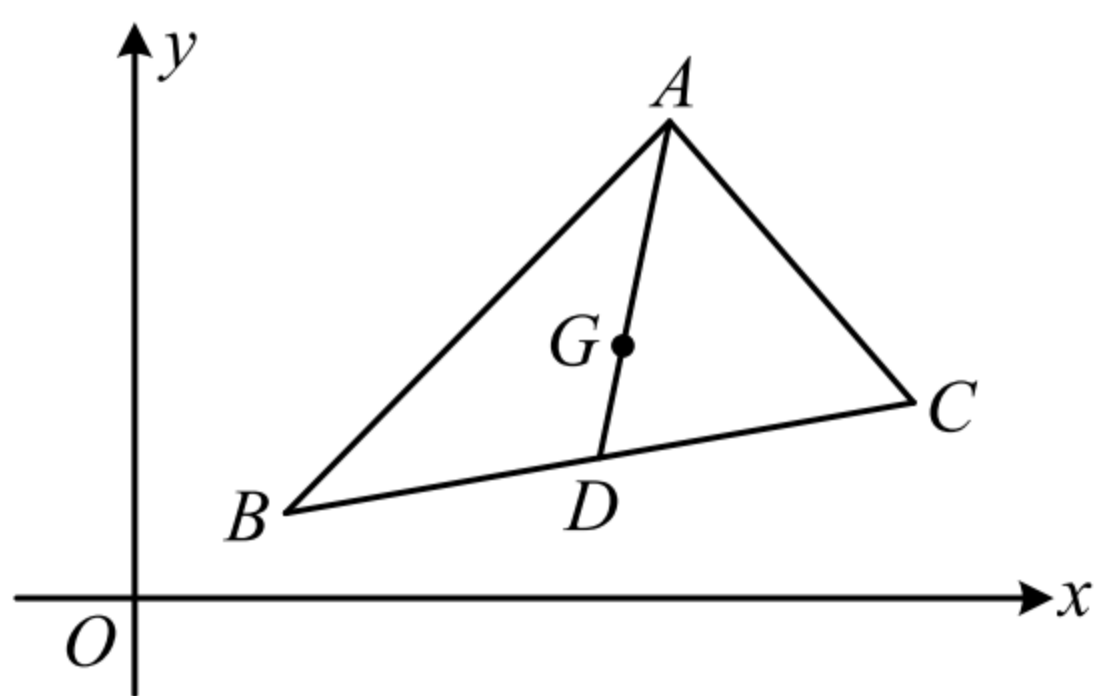
证明：如图，设 $G(x, y)$ 为 $\triangle ABC$ 的重心，则 $|AG|:|GD|=2:1$ ，

$$\text{所以 } \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \quad (\text{i}),$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AG} = (x - x_1, y - y_1), \quad \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1), \quad \overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1),$$

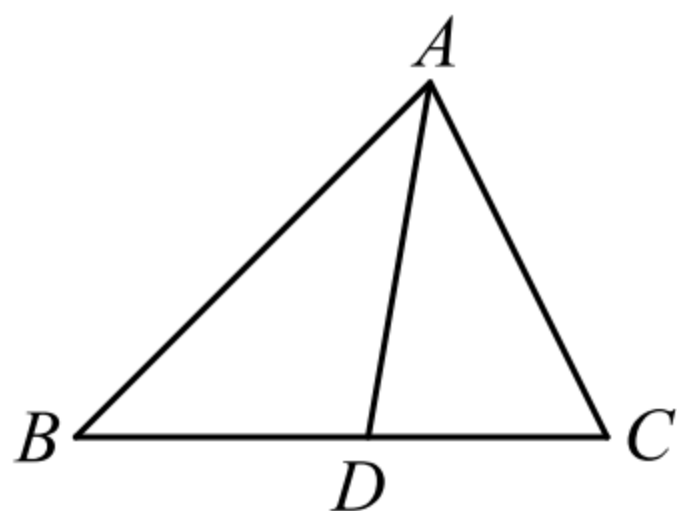
$$\text{所以由式(i)可得 } \begin{cases} x - x_1 = \frac{1}{3}(x_2 - x_1 + x_3 - x_1) \\ y - y_1 = \frac{1}{3}(y_2 - y_1 + y_3 - y_1) \end{cases}, \text{ 整理得: } \begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \end{cases},$$

故重心 G 的坐标为 $(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3})$ 。



重要结论 10：（角平分线性质定理）如图， $\triangle ABC$ 的内角 A 的平分线与 BC 交于点

$$D, \text{ 则 } \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}.$$



证明：设 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的高为 h ，则 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2}BD \cdot h}{\frac{1}{2}CD \cdot h} = \frac{BD}{CD}$ (i)，

又 AD 是内角 A 的平分线，所以 $\angle BAD = \angle CAD$ ，

故 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD}{\frac{1}{2}AC \cdot AD \cdot \sin \angle CAD} = \frac{AB}{AC}$ ，结合式(i)可得 $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ 。

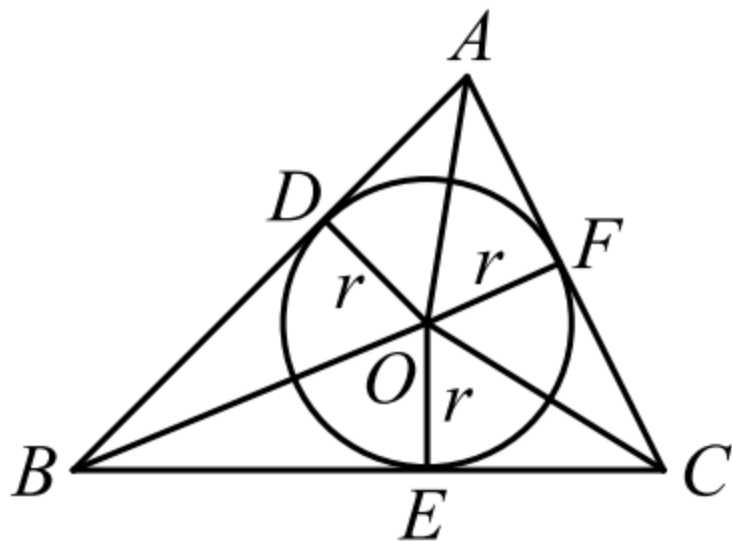
重要结论 11：（三角形的内切圆半径公式）设 $\triangle ABC$ 的面积为 S ，周长为 L ，内切

圆半径为 r ，则 $r = \frac{2S}{L}$ 。

证明：如图，设切点分别为 D, E, F ，则 $OD \perp AB$ ， $OE \perp BC$ ， $OF \perp AC$ ，

所以 $S = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2}AB \cdot OD + \frac{1}{2}BC \cdot OE + \frac{1}{2}AC \cdot OF$

$= \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}BC \cdot r + \frac{1}{2}AC \cdot r = \frac{1}{2}(AB + BC + AC)r = \frac{1}{2}Lr$ ，所以 $r = \frac{2S}{L}$ 。



重要结论 12：（等差、等比数列的片段和性质）

①若 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，其前 n 项和为 S_n ，则 $S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}, \dots$ 也构成等差数列，公差为 m^2d 。

②若 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，其前 n 项和为 S_n ，则当 $q \neq -1$ 或 m 为奇数时，

$S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}, \dots$ 也构成等比数列，公比为 q^m 。

证明：① $S_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m, S_{2m} - S_m = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{2m}$,

因为 $a_{m+1} - a_1 = md, a_{m+2} - a_2 = md, \dots, a_{2m} - a_m = md$,

所以 $(S_{2m} - S_m) - S_m = (a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{2m}) - (a_1 + a_2 + \dots + a_m)$

$$= (a_{m+1} - a_1) + (a_{m+2} - a_2) + \dots + (a_{2m} - a_m) = md + md + \dots + md = m^2 d,$$

同理， $(S_{3m} - S_{2m}) - (S_{2m} - S_m) = (a_{2m+1} + a_{2m+2} + \dots + a_{3m}) - (a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{2m})$

$$= (a_{2m+1} - a_{m+1}) + (a_{2m+2} - a_{m+2}) + \dots + (a_{3m} - a_{2m}) = md + md + \dots + md = m^2 d,$$

以此类推， $S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}, \dots$ 构成公差为 $m^2 d$ 的等差数列。

② 当 $q \neq -1$ 或 m 为奇数时， $S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}, \dots$ 均不为 0，

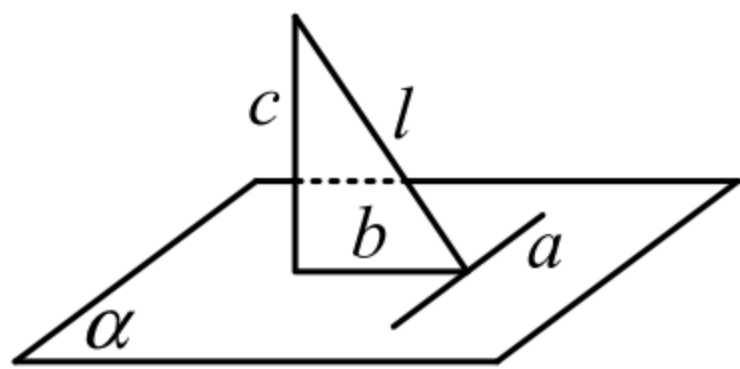
$$\text{且 } \frac{S_{2m} - S_m}{S_m} = \frac{a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{2m}}{a_1 + a_2 + \dots + a_m} = \frac{a_1 q^m + a_2 q^m + \dots + a_m q^m}{a_1 + a_2 + \dots + a_m} = q^m,$$

$$\frac{S_{3m} - S_{2m}}{S_{2m} - S_m} = \frac{a_{2m+1} + a_{2m+2} + \dots + a_{3m}}{a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{2m}} = \frac{a_{m+1} q^m + a_{m+2} q^m + \dots + a_{2m} q^m}{a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{2m}} = q^m,$$

以此类推， $S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}, \dots$ 构成公比为 q^m 的等比数列。

重要结论 13: (三垂线定理) 如图， $a \subset \alpha, l$ 在 α 内的射影是 b ，若 $a \perp b$ ，则 $a \perp l$ ，此结论反过来也成立，即当 $a \perp l$ 时，也有 $a \perp b$ 。

证明：因为 $\begin{cases} c \perp \alpha \\ a \subset \alpha \end{cases}$ ，所以 $a \perp c$ ，故 $a \perp b \Leftrightarrow a \perp$ 图中的三角形所在平面 $\Leftrightarrow a \perp l$ 。



重要结论 14: (椭圆通径公式) 对于椭圆，过其焦点且垂直于长轴的弦叫做通径，通径的长为 $\frac{2b^2}{a}$ ，其中 a, b 分别为椭圆的长半轴长、短半轴长。

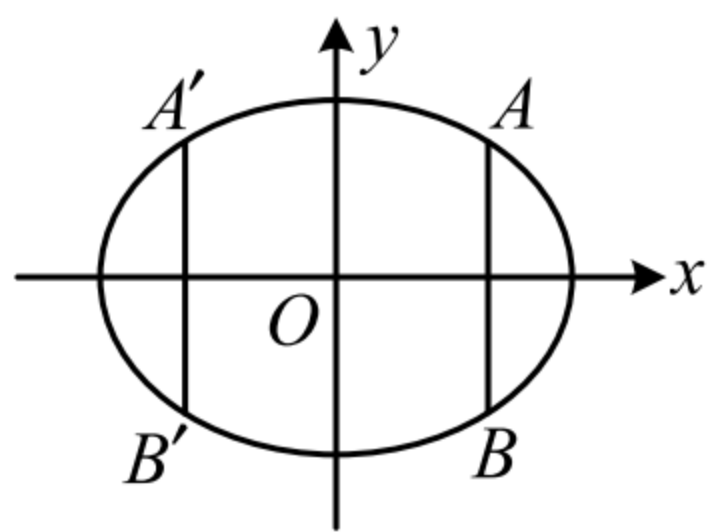
证明：如图，不妨设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，其焦点为 $(\pm c, 0)$ ，

过其焦点且与长轴垂直的直线的方程为 $x=c$ 或 $x=-c$ ，以 $x=c$ 为例，

将 $x=c$ 代入 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 可得 $\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，

解得： $y = \pm \sqrt{b^2(1 - \frac{c^2}{a^2})} = \pm \sqrt{b^2 \cdot \frac{a^2 - c^2}{a^2}} = \pm \sqrt{\frac{b^4}{a^2}} = \pm \frac{b^2}{a}$ ，

所以图中通径长 $|AB| = \frac{2b^2}{a}$ ，由椭圆的对称性可知通径 $A'B'$ 的长也为 $\frac{2b^2}{a}$ 。



重要结论 15：（双曲线通径公式）对于双曲线，过其焦点且垂直于实轴的弦叫做通

径，通径的长为 $\frac{2b^2}{a}$ ，其中 a, b 分别为双曲线的实半轴长、虚半轴长。

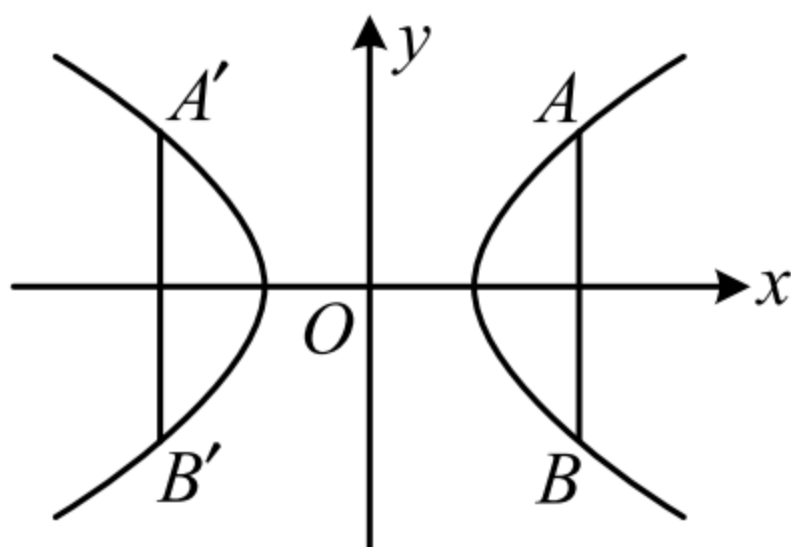
证明：如图，不妨设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，其焦点为 $(\pm c, 0)$ ，

过其焦点且与实轴垂直的直线的方程为 $x=c$ 或 $x=-c$ ，以 $x=c$ 为例，

将 $x=c$ 代入 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 可得 $\frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，

解得： $y = \pm \sqrt{b^2(\frac{c^2}{a^2} - 1)} = \pm \sqrt{b^2 \cdot \frac{c^2 - a^2}{a^2}} = \pm \sqrt{\frac{b^4}{a^2}} = \pm \frac{b^2}{a}$ ，

所以图中通径长 $|AB| = \frac{2b^2}{a}$ ，由双曲线的对称性可知通径 $A'B'$ 的长也为 $\frac{2b^2}{a}$ 。



重要结论 16：（韦达定理推论）设 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的

两根，则 $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$.

证明：由韦达定理， $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ ，所以 $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$

$$= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a}} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} .$$

重要结论 17：（弦长公式）设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，

若 A, B 在直线 $y = kx + b$ 上，则 $|AB| = \sqrt{1 + k^2} \cdot |x_1 - x_2|$ ；

若 A, B 在直线 $x = my + t$ 上，则 $|AB| = \sqrt{1 + m^2} \cdot |y_1 - y_2|$.

特别地，当 A, B 是直线与椭圆（或双曲线、抛物线）交点时，常联立直线与椭圆（或双曲线、抛物线）的方程，得到关于 x 或 y 的一元二次方程，则上述弦长公式中的 $|x_1 - x_2|$ ， $|y_1 - y_2|$ 可由韦达定理推论来算. 以 $|x_1 - x_2|$ 为例，假设联立直线与圆

锥曲线得到的一元二次方程是 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，则 $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ ，所以此时

的弦长公式可写成 $|AB| = \sqrt{1 + k^2} \cdot |x_1 - x_2| = \sqrt{1 + k^2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$.

证明：由两点间的距离公式， $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (i)，

若 A, B 两点在直线 $y = kx + b$ 上，则 $\begin{cases} y_1 = kx_1 + b \\ y_2 = kx_2 + b \end{cases}$ ，

$$\begin{aligned} \text{代入(i)得 } |AB| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (kx_1 + b - kx_2 - b)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + k^2(x_1 - x_2)^2} \\ &= \sqrt{(1 + k^2)(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{1 + k^2} \cdot |x_1 - x_2| ; \end{aligned}$$

若 A, B 两点在直线 $x = my + t$ 上，则 $\begin{cases} x_1 = my_1 + t \\ x_2 = my_2 + t \end{cases}$ ，

$$\text{代入(i)得 } |AB| = \sqrt{(my_1 + t - my_2 - t)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{m^2(y_1 - y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$= \sqrt{(m^2 + 1)(y_1 - y_2)^2} = \sqrt{1 + m^2} \cdot |y_1 - y_2|.$$

重要结论 18：双曲线的焦点到其渐近线的距离等于虚半轴长 b .

证明：不妨设双曲线为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，则该双曲线的渐近线为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，

即 $bx \pm ay = 0$ ，设双曲线的焦点为 $(\pm c, 0)$ ，

$$\text{则焦点到渐近线的距离 } d = \frac{|\pm cb|}{\sqrt{b^2 + (\pm a)^2}} = \frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{bc}{c} = b.$$

重要结论 19：（切线、切点弦统一结论）设点 $P(x_0, y_0)$ ，将圆的标准方程

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 变成 $(x - a)(x_0 - a) + (y - b)(y_0 - b) = r^2$ ，或在圆的一般式方

程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 中，用 x_0x 替换 x^2 ，用 y_0y 替换 y^2 ，用 $\frac{x + x_0}{2}$ 替换 x ，

用 $\frac{y + y_0}{2}$ 替换 y ，可以得到一个新方程，当 P 在圆上时，如图 1，该方程表示切线

l ；当 P 在圆外时，如图 2，该方程表示切点弦 AB 所在直线的方程. 本结论对椭圆、双曲线、抛物线也成立.

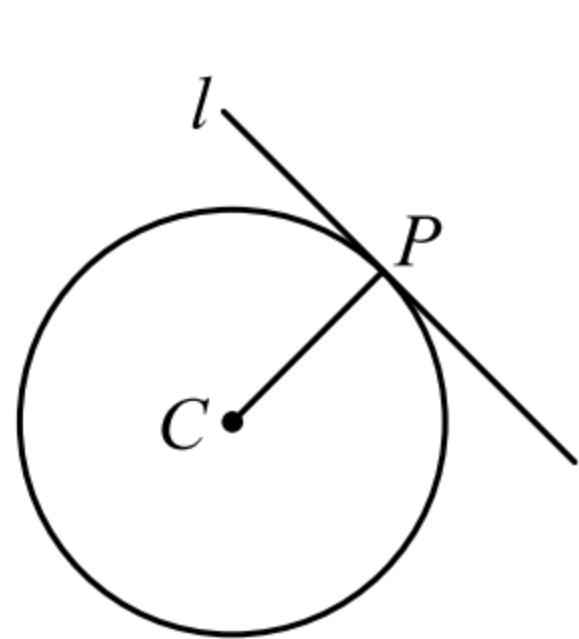


图1

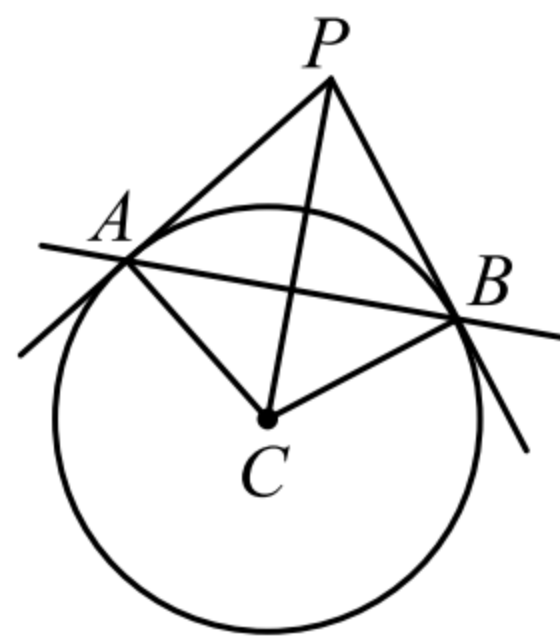


图2

证明：按圆、椭圆、双曲线、抛物线逐一论证上述统一结论较繁琐，下面我们只证圆的切点弦方程. 如下图，因为 PA, PB 是圆的切线，所以 $PA \perp AC$ ， $PB \perp BC$ ，故 P, A, C, B 四点都在以 PC 为直径的圆上， AB 即为该圆与圆 C 的公共弦，

由 $P(x_0, y_0)$ ， $C(a, b)$ 可得 PC 中点为 $(\frac{x_0 + a}{2}, \frac{y_0 + b}{2})$ ， $|PC|^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2$ ，

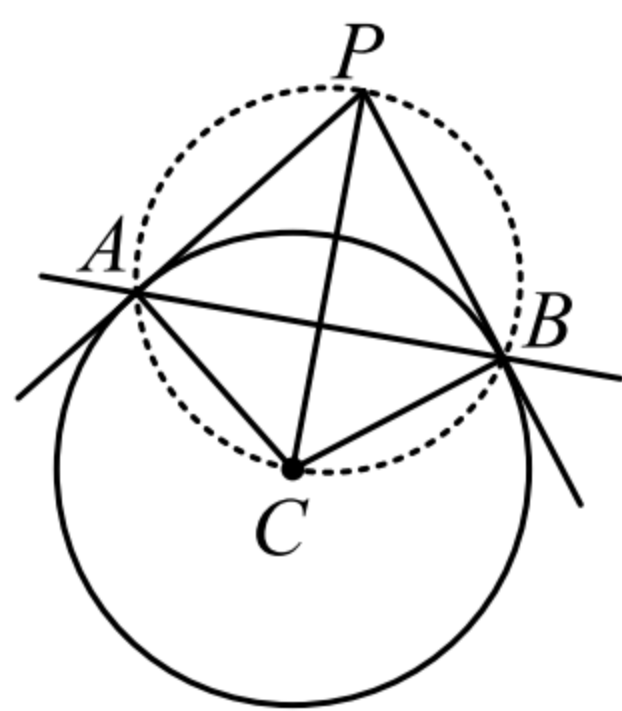
故以 PC 为直径的圆的方程为 $(x - \frac{x_0 + a}{2})^2 + (y - \frac{y_0 + b}{2})^2 = \frac{1}{4}[(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2]$,

展开整理得: $x^2 + y^2 - (x_0 + a)x - (y_0 + b)y + ax_0 + by_0 = 0$ (i),

圆 C 的方程为 $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 = r^2$ (ii),

用方程(ii)减去方程(i)可得 $(x_0 - a)x + (y_0 - b)y - ax_0 - by_0 + a^2 + b^2 = r^2$,

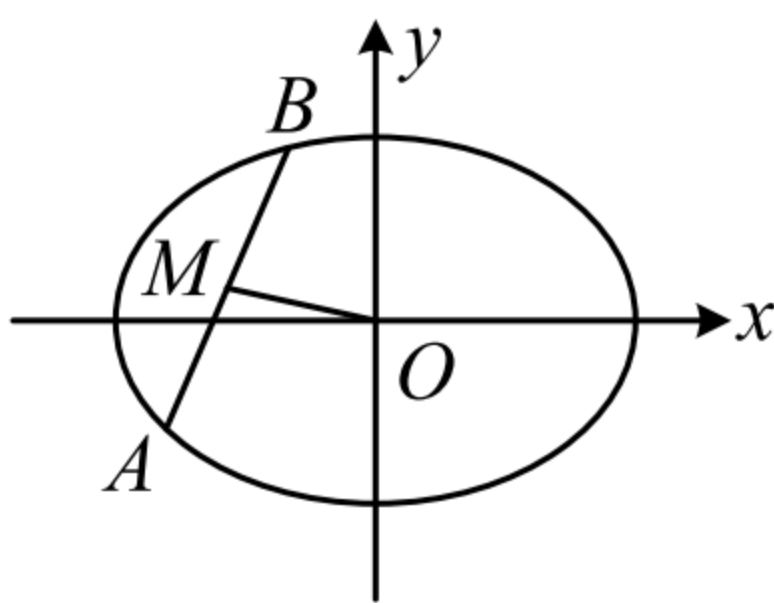
整理得直线 AB 的方程为 $(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2$.



重要结论 20: (椭圆的中点弦斜率积结论) 如图, AB 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的

一条不与坐标轴垂直且不过原点的弦, M 为 AB 中点, 则 $k_{AB} \cdot k_{OM} = -\frac{b^2}{a^2}$.

注: 对于焦点在 y 轴上的椭圆 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 则上述斜率积为 $-\frac{a^2}{b^2}$.



证明: 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$,

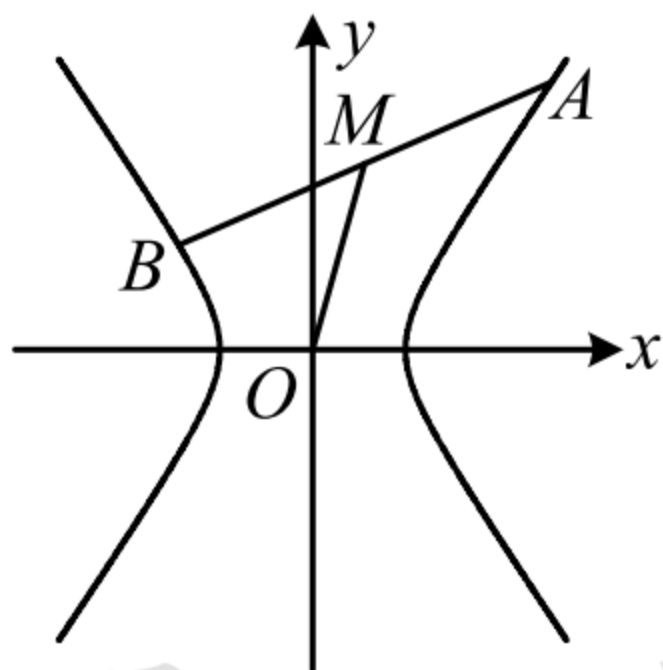
因为 A, B 都在椭圆上, 所以
$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \end{cases},$$

两式作差得： $\frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0$ ，整理得： $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = -\frac{b^2}{a^2}$ (i)，

注意到 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = k_{AB}$ ， $\frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{2y_M}{2x_M} = \frac{y_M}{x_M} = k_{OM}$ ，所以式(i)即为 $k_{AB} \cdot k_{OM} = -\frac{b^2}{a^2}$ ，

对于焦点在 y 轴上的情形，证法与上面相同，不再赘述。

重要结论 21：（双曲线的中点弦斜率积结论）如图， AB 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条不与坐标轴垂直且不过原点的弦， M 为 AB 中点，则 $k_{AB} \cdot k_{OM} = \frac{b^2}{a^2}$ 。



注：对于焦点在 y 轴上的双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，则上述斜率积为 $\frac{a^2}{b^2}$ 。

证明： 设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ， $x_1 \neq x_2$ ， $y_1 \neq y_2$ ，

因为 A, B 都在双曲线上，所以 $\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \end{cases}$ ，

两式作差得： $\frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} - \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0$ ，整理得： $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{b^2}{a^2}$ (i)，

注意到 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = k_{AB}$ ， $\frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{2y_M}{2x_M} = \frac{y_M}{x_M} = k_{OM}$ ，所以式(i)即为 $k_{AB} \cdot k_{OM} = \frac{b^2}{a^2}$ ，

对于焦点在 y 轴上的情形，证法与上面相同，不再赘述。

重要结论 22：（平均数、方差的性质）设数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数为 $\bar{x}$ ，方差为 s^2 ，

标准差为 s ，则数据 $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$ 的平均数为 $a\bar{x} + b$ ，方差为 $a^2 s^2$ ，标

准差为 $|a|s$.

证明：由题意， $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$, $s^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \bar{y} &= \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} = \frac{ax_1 + b + ax_2 + b + \cdots + ax_n + b}{n} \\ &= \frac{a(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + nb}{n} = a \cdot \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + b = a\bar{x} + b, \end{aligned}$$

故新数据的方差 $s_1^2 = \frac{1}{n}[(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \cdots + (y_n - \bar{y})^2]$

$$= \frac{1}{n}[(ax_1 + b - a\bar{x} - b)^2 + (ax_2 + b - a\bar{x} - b)^2 + \cdots + (ax_n + b - a\bar{x} - b)^2]$$

$$= \frac{1}{n}[a^2(x_1 - \bar{x})^2 + a^2(x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + a^2(x_n - \bar{x})^2]$$

$$= a^2 \cdot \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2] = a^2 s^2, \text{ 标准差 } s_1 = \sqrt{a^2 s^2} = |a|s.$$

重要结论 23：（期望、方差的性质）设随机变量 X 的期望为 $E(X)$ ，方差为 $D(X)$ ，

标准差为 $\sqrt{D(X)}$ ，若 $Y = aX + b$ ，则 Y 的期望 $E(Y) = aE(X) + b$ ，方差

$D(Y) = a^2 D(X)$ ，标准差为 $|a|\sqrt{D(X)}$.

证明：设 X 的分布列为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

则 $E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$ (i),

$D(X) = [x_1 - E(X)]^2 p_1 + [x_2 - E(X)]^2 p_2 + \cdots + [x_n - E(X)]^2 p_n$ (ii),

因为 $Y = aX + b$ ，所以 Y 的分布列为

Y	$ax_1 + b$	$ax_2 + b$	$\cdots$	$ax_n + b$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

故 $E(Y) = (ax_1 + b)p_1 + (ax_2 + b)p_2 + \cdots + (ax_n + b)p_n$

$= a(x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n) + b(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)$ (iii),

将式(i)和 $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ 代入式(iii)可得 $E(Y) = aE(X) + b$,

$$\begin{aligned} D(Y) &= [ax_1 + b - E(Y)]^2 p_1 + [ax_2 + b - E(Y)]^2 p_2 + \cdots + [ax_n + b - E(Y)]^2 p_n \\ &= [ax_1 + b - aE(X) - b]^2 p_1 + [ax_2 + b - aE(X) - b]^2 p_2 + \cdots + [ax_n + b - aE(X) - b]^2 p_n \\ &= a^2 [x_1 - E(X)]^2 p_1 + a^2 [x_2 - E(X)]^2 p_2 + \cdots + a^2 [x_n - E(X)]^2 p_n \\ &= a^2 \{ [x_1 - E(X)]^2 p_1 + [x_2 - E(X)]^2 p_2 + \cdots + [x_n - E(X)]^2 p_n \} = a^2 D(X), \end{aligned}$$

随机变量 Y 的标准差为 $\sqrt{D(Y)} = \sqrt{a^2 D(X)} = |a| \sqrt{D(X)}$.

重要结论 24: (超几何分布期望公式) 设随机变量 X 服从超几何分布, 三个参数分

别为 N, n, M , 则 $E(X) = n \cdot \frac{M}{N}$.

二级结论 25: (糖水不等式) 设 $a > b > 0$, $c > 0$, 则 $\frac{b+c}{a+c} > \frac{b}{a}$.

证明: $\frac{b+c}{a+c} - \frac{b}{a} = \frac{(b+c)a - (a+c)b}{(a+c)a} = \frac{c(a-b)}{(a+c)a}$ (i),

因为 $a > b > 0$, $c > 0$, 所以 $(a+c)a > 0$, $a-b > 0$,

结合(i)可得 $\frac{b+c}{a+c} - \frac{b}{a} > 0$, 故 $\frac{b+c}{a+c} > \frac{b}{a}$.

二级结论 26: (三元均值不等式) 设 a, b, c 为正实数, 则 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, 当且

仅当 $a=b=c$ 时取等号. 此不等式可变形为 $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$.

二级结论 27: (常用泰勒公式) ① $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$;

② $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + \cdots$;

③ $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + \cdots$;

$$\textcircled{4} \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} + \cdots;$$

$$\textcircled{5} \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \cdots.$$

二级结论 28: (万能公式) 设 $\alpha \neq 2k\pi + \pi$ 且 $\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, 其中 $k \in \mathbf{Z}$, 则

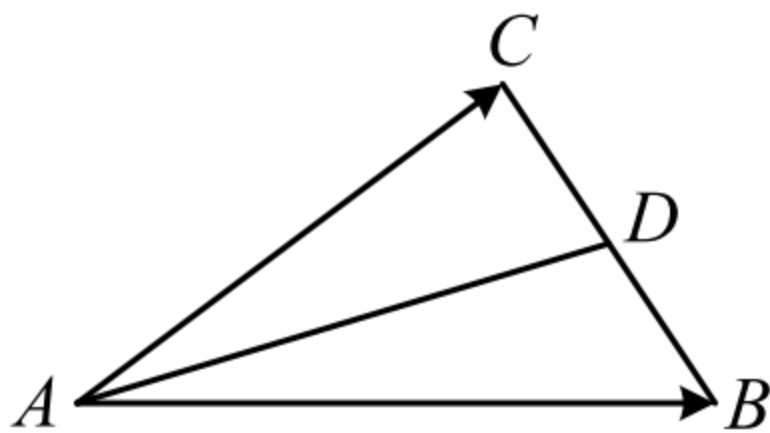
$$\textcircled{1} \sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \textcircled{2} \cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \textcircled{3} \tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

证明: $\textcircled{1} \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}};$

$$\textcircled{2} \cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$\textcircled{3} \tan \alpha = \tan(2 \times \frac{\alpha}{2}) = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

二级结论 29: (极化恒等式) 如图, 设 D 为 BC 中点, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AD}|^2 - |\overrightarrow{BD}|^2$.



证明: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})$, 因为 $\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{DB}$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DB}) = |\overrightarrow{AD}|^2 - |\overrightarrow{BD}|^2,$$

此结论虽然归为了二级结论, 但针对性较强(涉及中线或底边中点的数量积问题), 推荐掌握.

二级结论 30: (重心等分面积结论) 设 $\triangle ABC$ 的重心为 G , 则 $S_{\triangle GAB} = S_{\triangle GAC} = S_{\triangle GBC}$.

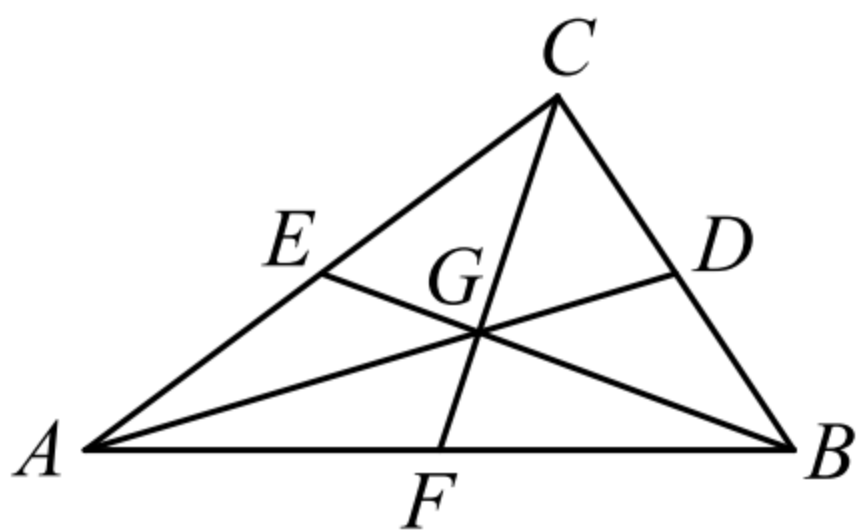
证明: 如图, 因为 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 所以 D, E, F 分别为所在边的中点,

且 $AG:GD = BG:GE = CG:GF = 2:1$, 考虑 $\triangle GAB$ 和 $\triangle GBD$ 的面积,

若都以 B 为顶点, 则它们的高相等, 设为 h , 则 $\frac{S_{\triangle GAB}}{S_{\triangle GBD}} = \frac{\frac{1}{2}AG \cdot h}{\frac{1}{2}GD \cdot h} = \frac{AG}{GD} = 2$,

所以 $S_{\triangle GAB} = \frac{2}{3}S_{\triangle ABD}$, 又 D 为 BC 中点, 所以 $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$,

从而 $S_{\triangle GAB} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$, 同理, $S_{\triangle GAC} = S_{\triangle GBC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$, 故结论成立.



公众号：一数儿

二级结论 31: (正四面体外接球、内切球半径) 设正四面体的棱长为 a , 则其外接

球半径 $R = \frac{\sqrt{6}}{4}a$, 内切球半径 $r = \frac{\sqrt{6}}{12}a$.

证明: 如图, 将正四面体放入正方体中, 二者有相同的外接球,

由正四面体的棱长为 a 可得正方体的棱长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$,

所以正方体的外接球半径 $R = \frac{\sqrt{2}}{2}a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}a$,

故正四面体的外接球半径 $R = \frac{\sqrt{6}}{4}a$,

内切球半径 r 即为球心 O 到正四面体的面的距离,

如图, 球心 O 为正方体的中心, 即 CE 的中点,

由图可知 CE 在面 $AEBF$ 内的射影是 EF ,

因为 $AB \perp EF$ ，所以由三垂线定理， $AB \perp CE$ ，

又 CE 在面 $BGDE$ 内的射影为 EG ，且 $BD \perp EG$ ，

所以由三垂线定理， $BD \perp CE$ ，故 $CE \perp$ 平面 ABD ，

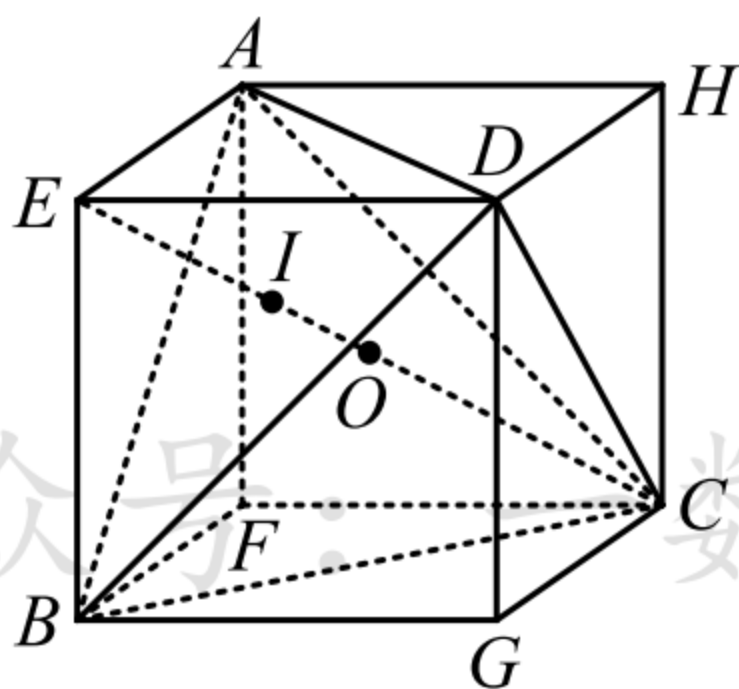
设 OE 与平面 ABD 交于点 I ，则点 O 到平面 ABD 的距离

$$OI = OE - IE = \frac{1}{2}CE - IE = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}a - IE = \frac{\sqrt{6}}{4}a - IE \quad (i),$$

由三棱锥的等体积性， $V_{E-ABD} = V_{A-EBD}$ ，

$$\text{所以 } \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times IE = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}a, \text{ 解得: } IE = \frac{\sqrt{6}}{6}a,$$

$$\text{代入(i)得 } OI = \frac{\sqrt{6}}{4}a - \frac{\sqrt{6}}{6}a = \frac{\sqrt{6}}{12}a, \text{ 所以正四面体的内切球半径 } r = \frac{\sqrt{6}}{12}a.$$



二级结论 32：（角版焦半径、焦点弦公式，焦原三角形面积公式）

设抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ， O 为原点。

①焦半径公式：如图 1，设 A 为抛物线上任意一点，记 $\angle AFO = \alpha$ ，则焦半径

$$|AF| = \frac{p}{1 + \cos \alpha}.$$

②焦点弦公式：如图 2， AB 是抛物线的焦点弦，记 $\angle AFO = \alpha$ ，则 $|AB| = \frac{2p}{\sin^2 \alpha}.$

③焦原三角形面积公式：如图 3，设 AB 是抛物线的焦点弦，记 $\angle AFO = \alpha$ ，则

$$S_{\triangle AOB} = \frac{p^2}{2 \sin \alpha}.$$

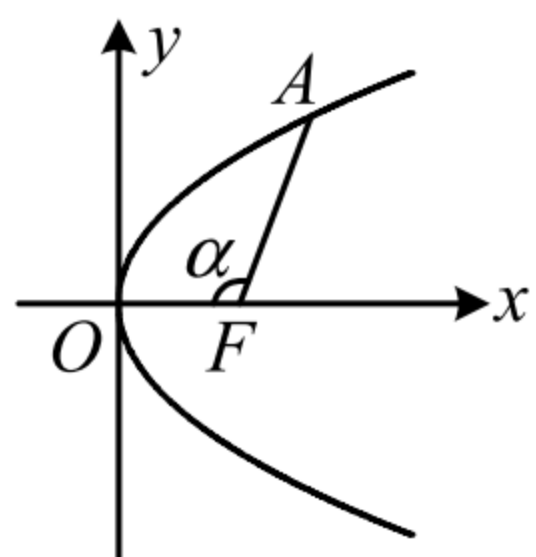


图1

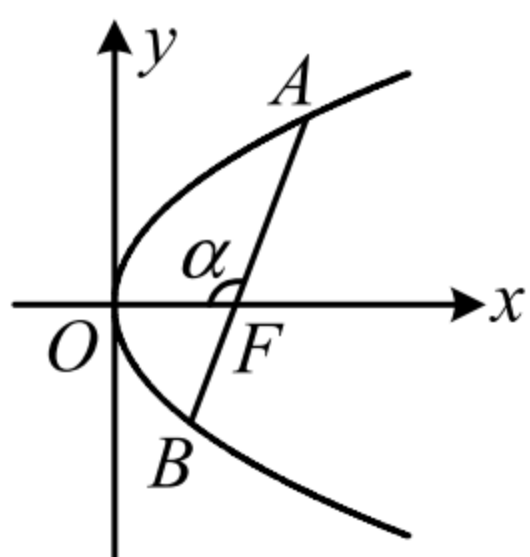


图2

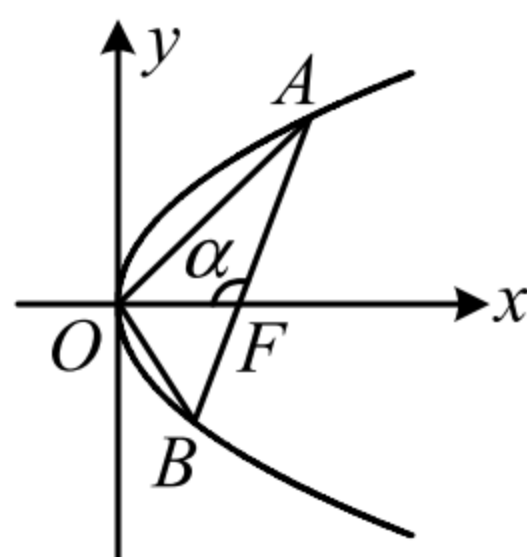


图3

证明：①作 $AM \perp x$ 轴于 M ，先考虑 M 在 F 右侧的情形，如图 4，

设 $A(x_0, y_0)$ ，则 $|FM| = x_0 - \frac{p}{2}$ ，

又 $|FM| = |AF| \cos \angle AFM = |AF| \cos(\pi - \alpha) = -|AF| \cos \alpha$ ，

与上式比较可得： $-|AF| \cos \alpha = x_0 - \frac{p}{2}$ ，

另一方面，由坐标版焦半径公式知 $|AF| = x_0 + \frac{p}{2}$ ，

与上式作差消去 x_0 整理得： $|AF| = \frac{p}{1 + \cos \alpha}$ ；

同理可证当 M 在 F 左侧或恰好与 F 重合时，都有 $|AF| = \frac{p}{1 + \cos \alpha}$ 。

②如图 5， $\angle BFO = \pi - \alpha$ ，由①中的焦半径公式可得 $|BF| = \frac{p}{1 + \cos(\pi - \alpha)}$ ，

$|BF| = \frac{p}{1 + \cos(\pi - \alpha)} = \frac{p}{1 - \cos \alpha}$ ，所以 $|AB| = |AF| + |BF| = \frac{p}{1 + \cos \alpha} + \frac{p}{1 - \cos \alpha}$

$= \frac{p(1 - \cos \alpha) + p(1 + \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)} = \frac{2p}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2p}{\sin^2 \alpha}$ 。

③如图 6，作 $OD \perp AB$ 于 D ，则 $|OD| = |OF| \sin \angle OFD$

$= |OF| \sin(\pi - \alpha) = |OF| \sin \alpha = \frac{p}{2} \cdot \sin \alpha$ ，

由②中的焦点弦公式可得 $|AB| = \frac{2p}{\sin^2 \alpha}$ ，

所以 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |AB| \cdot |OD| = \frac{1}{2} \cdot \frac{2p}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{p}{2} \cdot \sin \alpha = \frac{p^2}{2 \sin \alpha}$ 。

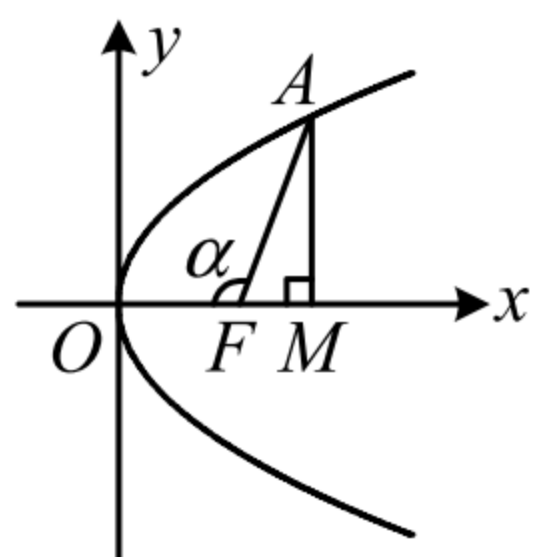


图4

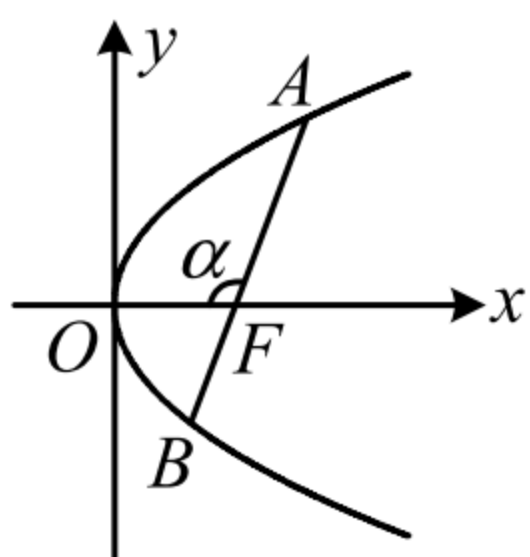


图5

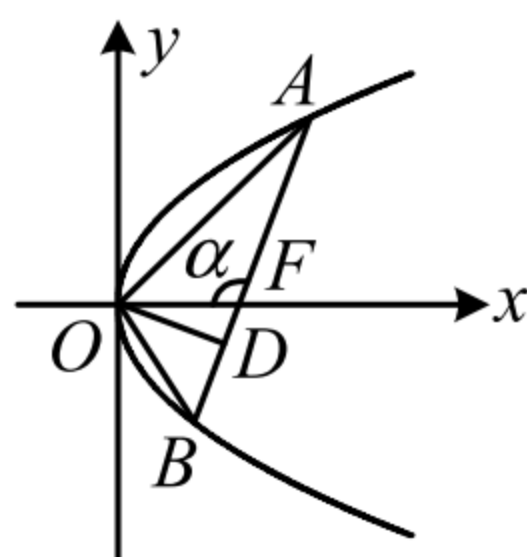


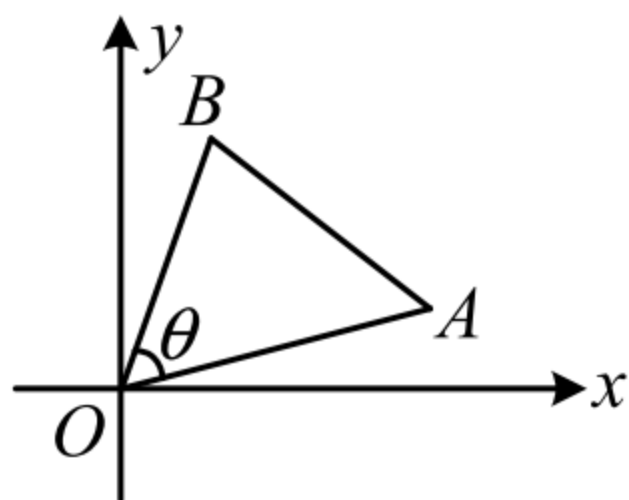
图6

二级结论 33：（原点三角形面积公式）设 O 为原点， $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，则

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|.$$

证明：如图，设 $\angle AOB = \theta$ ，则 $\cos \theta = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|}$ ，

$$\begin{aligned} \text{所以 } S_{\triangle AOB} &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|} \right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 \cdot |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{x_1^2 x_2^2 + x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 - (x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2} = \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|. \end{aligned}$$



二级结论 34：（椭圆的第三定义斜率积结论）如图 1，设 A ， B 分别是椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$$

的左、右顶点， P 是椭圆上不与 A ， B 重合的任意一点，则

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

注：①上述结论中 A, B 是椭圆的左、右顶点，可将其推广为椭圆上关于原点对称

的任意两点，如图 2，只要直线 PA, PB 的斜率都存在，就仍然满足 $k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{b^2}{a^2}$ 。

②若是焦点在 y 轴上的椭圆 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，则上述斜率积为 $-\frac{a^2}{b^2}$ 。

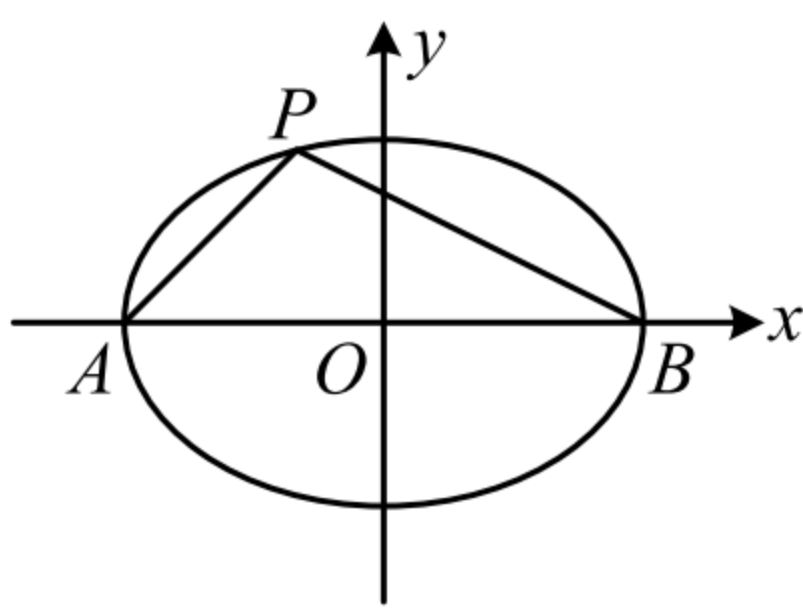


图1

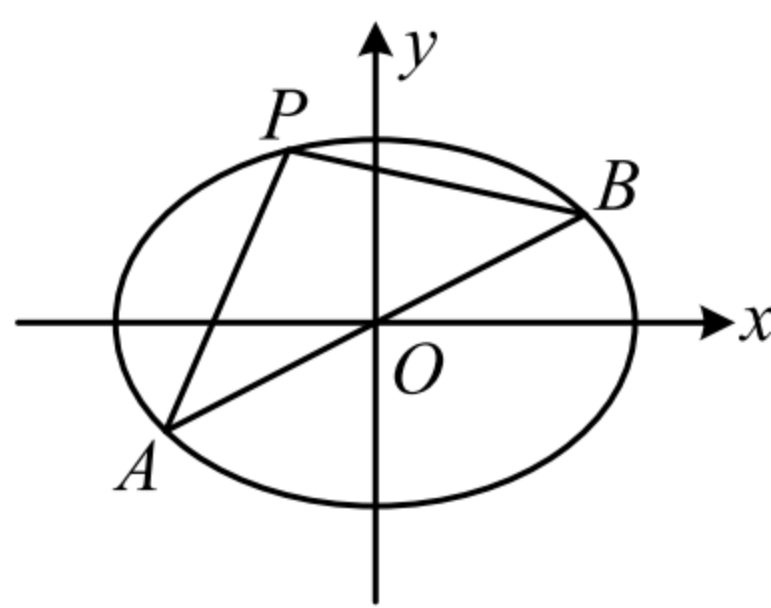


图2

证明：图 1 是图 2 的特殊情况，故下面只证图 2 的一般性结论，

$$\text{设 } A(x_1, y_1), P(x_2, y_2), \text{ 则 } B(-x_1, -y_1), k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1} = \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_2^2 - x_1^2} \quad (\text{i}),$$

$$\text{因为点 } A \text{ 在椭圆上, 所以 } \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \text{ 故 } y_1^2 = b^2(1 - \frac{x_1^2}{a^2}) = -\frac{b^2}{a^2}(x_1^2 - a^2),$$

$$\text{同理 } y_2^2 = -\frac{b^2}{a^2}(x_2^2 - a^2), \text{ 所以 } y_2^2 - y_1^2 = -\frac{b^2}{a^2}(x_2^2 - a^2 - x_1^2 + a^2) = -\frac{b^2}{a^2}(x_2^2 - x_1^2),$$

$$\text{代入(i)得: } k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{b^2}{a^2};$$

在上述条件中令 $A(-a, 0), B(a, 0)$ ，即得图 1 的特殊情况下的结论，

对于焦点在 y 轴上的情形，证法与上面相同，不再赘述。

此结论虽然归为了二级结论，但针对性较强（涉及椭圆上的点 P 与椭圆上关于原点对称的 A, B 两点的连线斜率积问题），推荐掌握。

二级结论 35：（双曲线第三定义斜率积结论）如图 1，设 A, B 分别是双曲线

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0) \text{ 的左、右顶点, } P \text{ 是双曲线上不与 } A, B \text{ 重合的任意一点,}$$

$$\text{则 } k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{b^2}{a^2}.$$

注：①上述结论中 A, B 是双曲线的左、右顶点，可将其推广为双曲线上关于原点对称的任意两点，如图 2，只要直线 PA, PB 的斜率都存在，就仍满足 $k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{b^2}{a^2}$ 。

②若是焦点在 y 轴上的双曲线，则上述斜率积为 $\frac{a^2}{b^2}$ 。

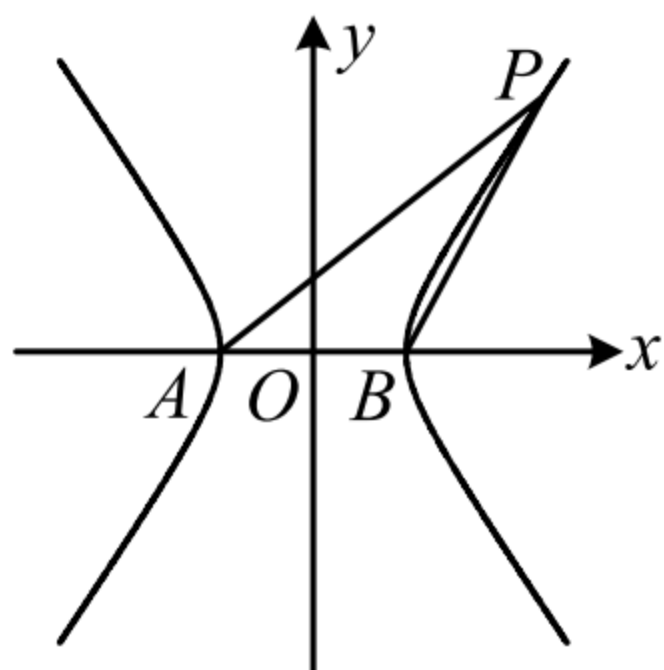


图1

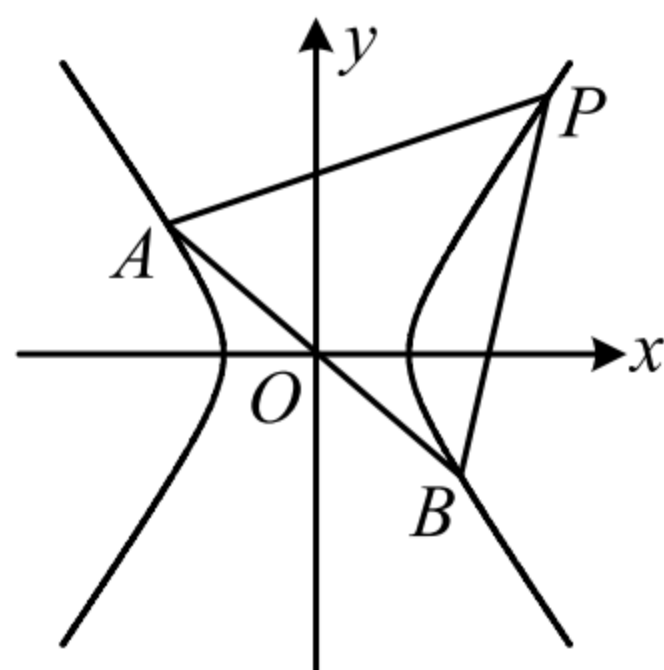


图2

证明：图 1 是图 2 的特殊情况，故下面只证图 2 的一般性结论，

$$\text{设 } A(x_1, y_1), P(x_2, y_2), \text{ 则 } B(-x_1, -y_1), k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1} = \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_2^2 - x_1^2} \quad (\text{i}),$$

$$\text{因为点 } A \text{ 在双曲线上, 所以 } \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \text{ 故 } y_1^2 = b^2 \left(\frac{x_1^2}{a^2} - 1 \right) = \frac{b^2}{a^2} (x_1^2 - a^2),$$

$$\text{同理, } y_2^2 = \frac{b^2}{a^2} (x_2^2 - a^2), \text{ 所以 } y_2^2 - y_1^2 = \frac{b^2}{a^2} (x_2^2 - a^2 - x_1^2 + a^2) = \frac{b^2}{a^2} (x_2^2 - x_1^2),$$

$$\text{代入(i)得: } k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{b^2}{a^2};$$

在上述条件中令 $A(-a, 0), B(a, 0)$ ，即得图 1 的特殊情况下的结论，

对于焦点在 y 轴上的情形，证法与上面相同，不再赘述。

此结论虽然归为了二级结论，但针对性较强（涉及双曲线上的点 P 与双曲线上关于原点对称的 A, B 两点的连线斜率积问题），推荐掌握。

二级结论 36:（抛物线的垂直定点结论）设 A, B 为抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上两点， O 为原点，若 $OA \perp OB$ ，则直线 AB 过定点 $M(2p, 0)$ 。

证明：设直线 AB 的方程为 $x = my + t$ ，设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，

因为 $OA \perp OB$ ，所以 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ (i)，

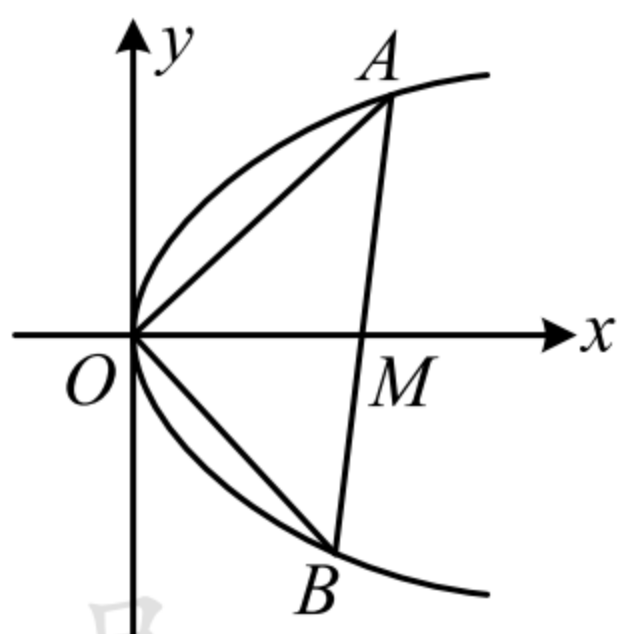
联立 $\begin{cases} x = my + t \\ y^2 = 2px \end{cases}$ 消去 x 整理得： $y^2 - 2pmy - 2pt = 0$ (ii)，

由韦达定理， $y_1y_2 = -2pt$ ，所以 $x_1x_2 = \frac{y_1^2}{2p} \cdot \frac{y_2^2}{2p} = \left(\frac{y_1y_2}{2p}\right)^2 = t^2$ ，

代入(i)得 $t^2 - 2pt = 0$ ，所以 $t = 0$ 或 $2p$ ，当 $t = 0$ 时， A, B 中有一个与原点重合，

不合题意，所以 $t = 2p$ ，经检验，满足方程(ii)的判别式 $\Delta > 0$ ，

从而直线 AB 的方程为 $x = my + 2p$ ，故直线 AB 过定点 $M(2p, 0)$ 。



公众号：一数儿

二级结论 37：以抛物线的焦点弦为直径的圆与准线相切。

证明：设以 AB 为直径的圆的圆心为 AB 中点 P ，半径为 r ，则 $r = \frac{1}{2}|AB|$ ，

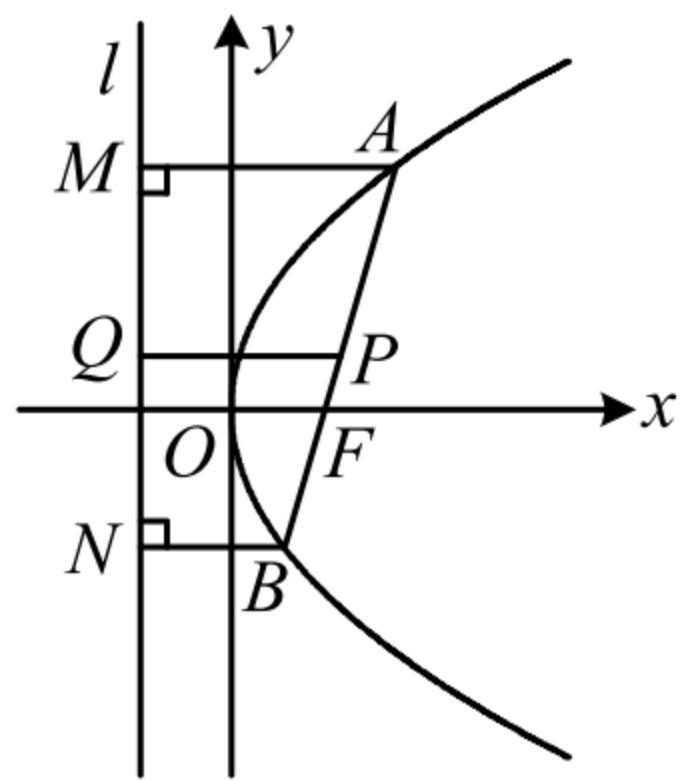
如图，作 $AM \perp$ 准线 l 于点 M ， $BN \perp l$ 于点 N ， $PQ \perp l$ 于点 Q ，

则由抛物线定义， $|AM| = |AF|$ ， $|BN| = |BF|$ ，

所以 $|PQ| = \frac{1}{2}(|AM| + |BN|) = \frac{1}{2}(|AF| + |BF|) = \frac{1}{2}|AB|$ ，

这说明点 P 到准线的距离等于 r ，

故准线与以 AB 为直径的圆相切。



二级结论 38：（点乘双根法）若将直线与圆锥曲线方程联立，得到关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，设该方程的两根为 x_1, x_2 ，现在要算 $(x_1 - t)(x_2 - t)$ ，将其展开为 $x_1x_2 - t(x_1 + x_2) + t^2$ ，结合韦达定理来算可行，但有时这样做计算量较大，更简单的方法是根据 x_1, x_2 是该方程的两根，将该方程左侧的 $ax^2 + bx + c$ 化为两根式，得到 $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ ，观察发现在两端同时令 $x = t$ ，即可得到 $at^2 + bt + c = a(t - x_1)(t - x_2)$ ，从而 $(x_1 - t)(x_2 - t) = \frac{at^2 + bt + c}{a}$ ，这样就快速求出了目标量 $(x_1 - t)(x_2 - t)$ ，此法叫做“点乘双根法”。

公众号：一数儿

