

卷40套

一数核心卷40套

一数本

结论册：44 个常用结论

卷40套

一数核心卷40套

一数本

卷40套

一数核心卷40套

一数本

目 录

函数

重要结论 3：函数图象的对称轴和对称中心结论..... 001

重要结论 4：双对称的周期结论..... 002

重要结论 5：经典切线放缩不等式..... 003

二级结论 31：端点效应..... 018

二级结论 32：常用泰勒公式..... 018

平面向量

重要结论 6：向量中线定理..... 005

重要结论 7：三点共线向量系数和结论..... 005

重要结论 8：投影向量计算公式..... 005

重要结论 9：重心坐标..... 006

二级结论 34：极化恒等式..... 019

三角函数、解三角形

重要结论 10：角平分线性质定理..... 006

重要结论 11：三角形的内切圆半径公式..... 007

二级结论 33：万能公式..... 018

数列

重要结论 12：等差、等比数列的片段和性质..... 007

重要结论 13： n^2 求和结论..... 008

立体几何

重要结论 14：三垂线定理..... 009

二级结论 36：正四面体外接球、内切球半径..... 020

解析几何

重要结论 15：椭圆通径公式..... 009

重要结论 16：双曲线通径公式..... 009

重要结论 18: 弦长公式 010

重要结论 19: 双曲线的焦点到渐近线距离结论 011

重要结论 20: 椭圆、双曲线焦点三角形面积公式 011

重要结论 21: 切线、切点弦统一结论 013

重要结论 22: 椭圆的中点弦斜率积结论 014

重要结论 23: 双曲线的中点弦斜率积结论 014

二级结论 37: 椭圆、双曲线的焦半径公式 021

二级结论 38: 角版焦半径、焦点弦公式, 焦原三角形面积公式 022

二级结论 39: 原点三角形面积公式 023

二级结论 40: 椭圆的第三定义斜率积结论 024

二级结论 41: 双曲线第三定义斜率积结论 025

二级结论 42: 抛物线的垂直定点结论 026

二级结论 43: 以抛物线的焦点弦为直径的圆与准线相切 026

二级结论 44: 点乘双根法 027

概率统计

重要结论 24: 平均数、方差的性质 015

重要结论 25: 期望、方差的性质 016

重要结论 26: 超几何分布期望公式 016

不等式

二级结论 28: 糖水不等式 017

二级结论 29: 三元均值不等式 017

二级结论 30: 权方和不等式 017

其它

重要结论 1: 子集个数结论 001

重要结论 2: 等比性质 001

重要结论 17: 韦达定理推论 010

二级结论 27: 复数模的乘除法结论 017

二级结论 35: 重心等分面积结论 019

内容提要：

本书的解析中用到了一些常用的结论，放到解析里进行反复证明较为繁琐，故将其整理到一起，形成了这本常用结论小册子。我们把结论分成了两类：一类是重要结论，这是必须掌握的；另一类是二级结论，可以选择性地掌握。

重要结论 1：（子集个数结论）设集合 A 有 $n(n \in \mathbf{N}^*)$ 个元素，则 A 的子集有 2^n 个，非空子集有 $2^n - 1$ 个，真子集有 $2^n - 1$ 个，非空真子集有 $2^n - 2$ 个。

证明： 设 A 的元素分别为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，集合 B 是集合 A 的子集，则要分析集合 B 有几种情况，可分步考虑 A 中的每个元素是否在 B 中，因为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 均可能在或不在 B 中，所以每个元素都有 2 种情况，由分步乘法计数原理，集合 B 有 $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$ 种情况，故 A 的子集有 2^n 个，去掉空集， A 的非空子集有 $2^n - 1$ 个，去掉 A 本身， A 的真子集有 $2^n - 1$ 个，去掉空集和 A 本身， A 的非空真子集有 $2^n - 2$ 个。

重要结论 2：（等比性质）设 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，且 $b + d \neq 0$ ，则 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ 。

证明： 设 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ ，则 $a = bk$ ， $c = dk$ ，

所以 $\frac{a+c}{b+d} = \frac{bk+dk}{b+d} = \frac{k(b+d)}{b+d} = k$ ，故 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ 。

重要结论 3：（函数图象的对称轴和对称中心结论）

①若 $f(x)$ 满足 $f(a+x) = f(b-x)$ ，则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称。

②若 $f(x)$ 满足 $f(a+x) + f(b-x) = c$ ，则 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ 对称。

③若将上述①②中的 x 全部换成 $2x$ （或 $3x$ 等等），结论依然成立。

例如，若 $f(a+2x) = f(b-2x)$ ，则仍可得到 $f(x)$ 关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称。

证明： ①设 $P(x, f(x))$ 是函数 $f(x)$ 图象上任意一点，

则 P 关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 的对称点为 $P'(a+b-x, f(x))$,

如图 1, 要证结论成立, 只需证 P' 也在 $f(x)$ 的图象上, 即证 $f(x) = f(a+b-x)$,

在 $f(a+x) = f(b-x)$ 中将 x 换成 $x-a$ 可得 $f(a+(x-a)) = f(b-(x-a))$,

所以 $f(x) = f(a+b-x)$, 故 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称;

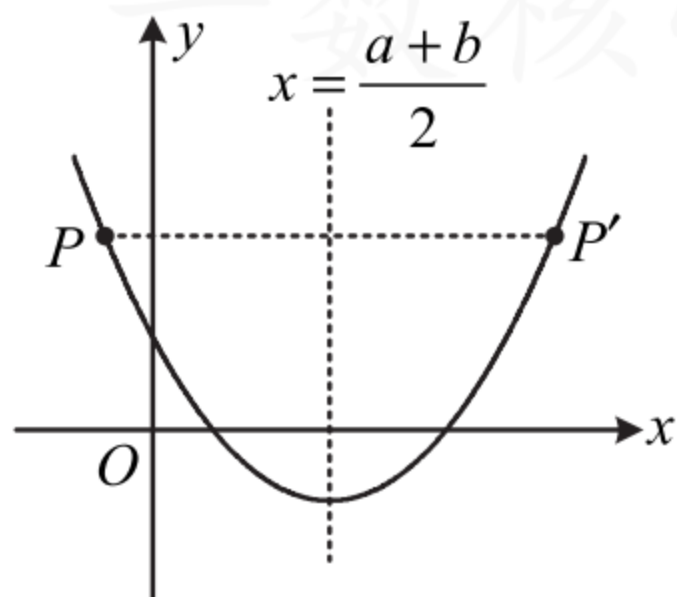


图1

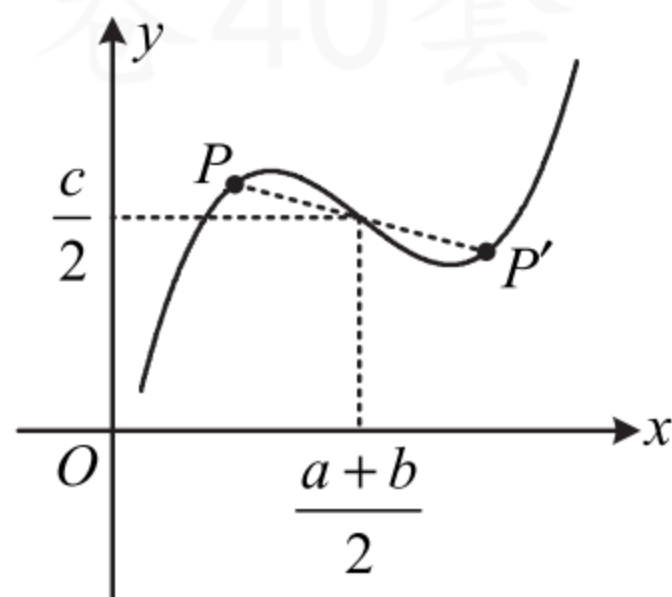


图2

②设 $P(x, f(x))$ 是函数 $f(x)$ 图象上任意一点,

则 P 关于 $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ 的对称点为 $P'(a+b-x, c-f(x))$,

如图 2, 要证结论成立, 只需证 P' 也在 $f(x)$ 的图象上,

即证 $c-f(x) = f(a+b-x)$, 也即证 $f(x) + f(a+b-x) = c$,

在 $f(a+x) + f(b-x) = c$ 中将 x 换成 $x-a$ 可得 $f(a+(x-a)) + f(b-(x-a)) = c$,

所以 $f(x) + f(a+b-x) = c$, 故 $f(x)$ 的图象关于 $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ 对称.

③以 $f(a+2x) = f(b-2x)$ 为例, 此式对任意的实数 x 都成立,

则将 x 换成 $\frac{x}{2}$ 可得 $f(a+x) = f(b-x)$, 所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称.

重要结论 4: (双对称的周期结论, 可借助三角函数辅助理解)

①若函数 $f(x)$ 有两条对称轴, 则 $f(x)$ 一定是周期函数, 周期为对称轴距离的 2 倍.

②若函数 $f(x)$ 有一条对称轴, 一个对称中心, 则 $f(x)$ 一定是周期函数, 周期为对称中心与对称轴之间距离的 4 倍.

③若函数 $f(x)$ 有在同一水平线上的两个对称中心，则 $f(x)$ 一定是周期函数，周期为对称中心之间距离的 2 倍.

证明：①设函数 $f(x)$ 的两条对称轴分别为 $x=a$ ， $x=b$ ，不妨假设 $b>a$ ，

$$\text{则 } \begin{cases} f(2a+x)=f(-x) \\ f(2b+x)=f(-x) \end{cases}, \text{ 所以 } f(2a+x)=f(2b+x),$$

在上式中将 x 换成 $x-2a$ 可得 $f(x)=f(x+2b-2a)$ ，

所以 $f(x)$ 一定是周期函数，周期 $T=2b-2a$ ，周期为对称轴之间距离的 2 倍.

$$\text{②设函数 } f(x) \text{ 的对称轴为 } x=a, \text{ 对称中心为 } (b,c), \text{ 则 } \begin{cases} f(2a+x)-f(-x)=0 \\ f(2b+x)+f(-x)=2c \end{cases},$$

所以 $f(2a+x)+f(2b+x)=2c$ ，将 x 换成 $x-2a$ 可得 $f(x)+f(x+2b-2a)=2c$ ，

所以 $f(x+2b-2a)=-f(x)+2c$ (i)，

在式(i)中将 x 换成 $x+2b-2a$ 可得 $f(x+2b-2a+2b-2a)=-f(x+2b-2a)+2c$ ，

结合式(i)可得 $f(x+4b-4a)=-[-f(x)+2c]+2c=f(x)$ ，

所以函数 $f(x)$ 一定是周期函数，周期 $T=4b-4a$ ，

周期为对称轴与对称中心之间距离的 4 倍.

③设 $f(x)$ 的两个对称中心分别为 (a,m) ， (b,m) ，不妨假设 $b>a$ ，

$$\text{则 } \begin{cases} f(2a+x)+f(-x)=2m \\ f(2b+x)+f(-x)=2m \end{cases}, \text{ 两式作差得: } f(2a+x)-f(2b+x)=0,$$

所以 $f(2a+x)=f(2b+x)$ ，将 x 换成 $x-2a$ 可得 $f(2a+x-2a)=f(2b+x-2a)$ ，

所以 $f(x)=f(x+2b-2a)$ ，故 $f(x)$ 为周期函数，周期为 $T=2b-2a$ ，

周期为两对称中心之间距离的 2 倍.

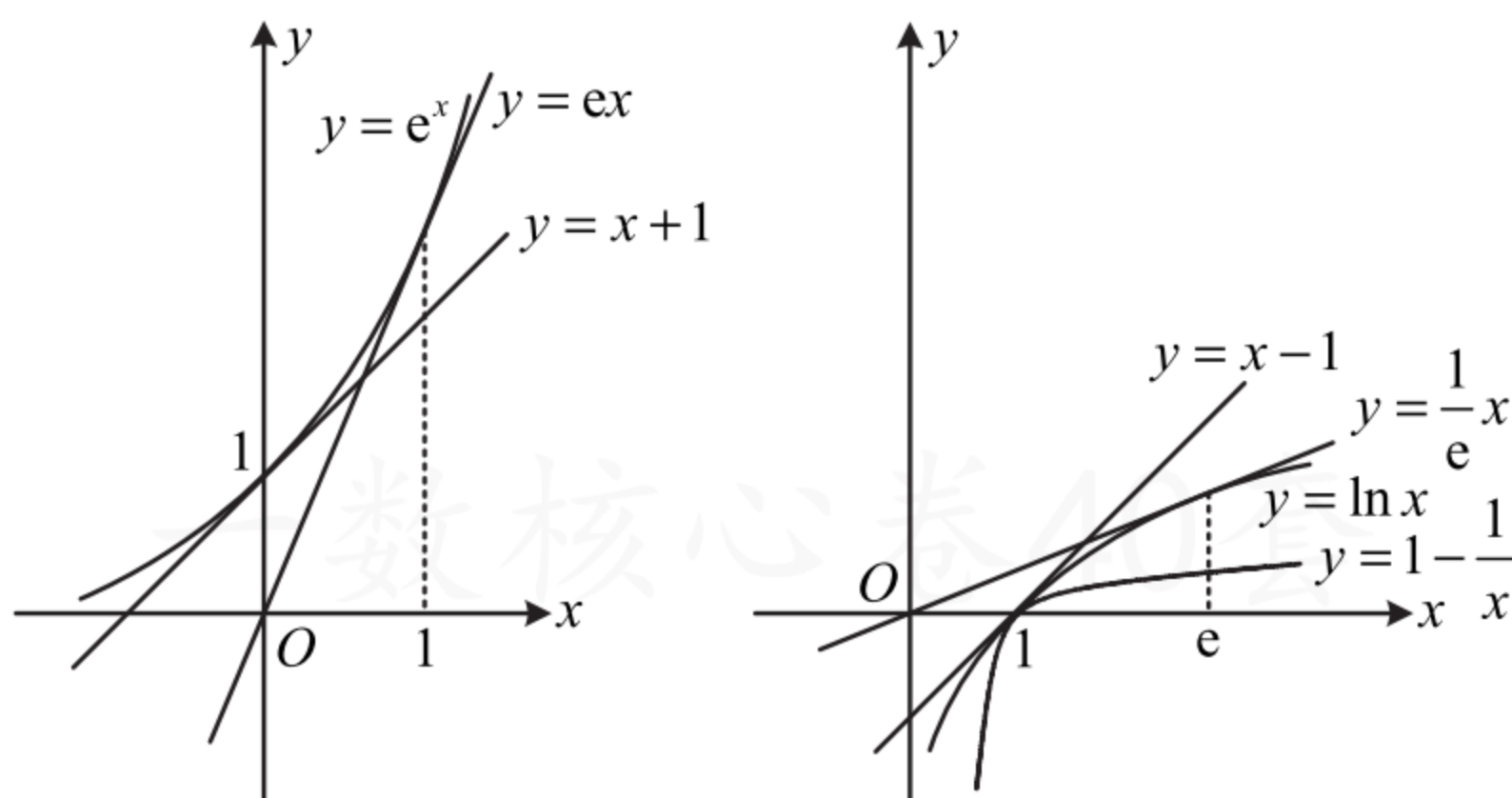
重要结论 5: (经典切线放缩不等式) ① $e^x \geq x+1$ ，当且仅当 $x=0$ 时取等号.

② $e^x \geq ex$ ，当且仅当 $x=1$ 时取等号.

③ $1-\frac{1}{x} \leq \ln x \leq x-1$ ，当且仅当 $x=1$ 时取等号.

④ $\ln x \leq \frac{x}{e}$ ，当且仅当 $x=e$ 时取等号.

上述不等式的图象特征如下面的两个图：



证明：①设 $f(x) = e^x - x - 1$, $x \in \mathbf{R}$, 则 $f'(x) = e^x - 1$, 所以 $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$,

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上 $\searrow$, 在 $(0, +\infty)$ 上 $\nearrow$,

所以 $f(x) \geq f(0) = 0$, 从而 $e^x - x - 1 \geq 0$, 故 $e^x \geq x + 1$, 取等条件是 $x = 0$.

②设 $g(x) = e^x - ex$, $x \in \mathbf{R}$, 则 $g'(x) = e^x - e$, 所以 $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$,

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$, 故 $g(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上 $\searrow$, 在 $(1, +\infty)$ 上 $\nearrow$,

所以 $g(x) \geq g(1) = 0$, 从而 $e^x - ex \geq 0$, 故 $e^x \geq ex$, 取等条件是 $x = 1$.

③设 $h(x) = \ln x - x + 1$, $x > 0$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$, 所以 $h'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$,

$h'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$, 故 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上 $\nearrow$, 在 $(1, +\infty)$ 上 $\searrow$,

所以 $h(x) \leq h(1) = 0$, 从而 $\ln x - x + 1 \leq 0$, 故 $\ln x \leq x - 1$, 取等条件是 $x = 1$,

在上式中将 x 换成 $\frac{1}{x}$ 可得 $\ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1$, 所以 $-\ln x \leq \frac{1}{x} - 1$, 故 $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$,

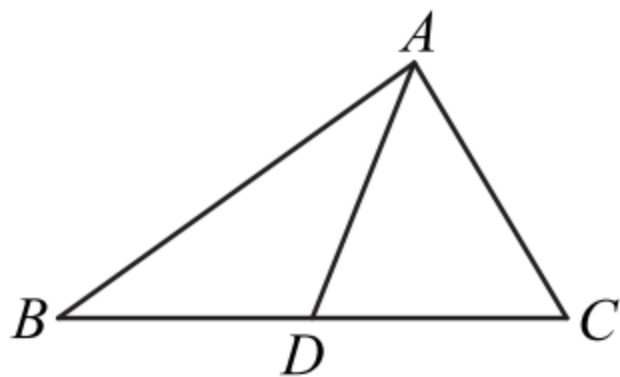
取等条件是 $\frac{1}{x} = 1$, 即 $x = 1$.

④设 $r(x) = \ln x - \frac{x}{e}$, $x > 0$, 则 $r'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = \frac{e-x}{ex}$, 所以 $r'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < e$,

$r'(x) < 0 \Leftrightarrow x > e$, 故 $r(x)$ 在 $(0, e)$ 上 $\nearrow$, 在 $(e, +\infty)$ 上 $\searrow$,

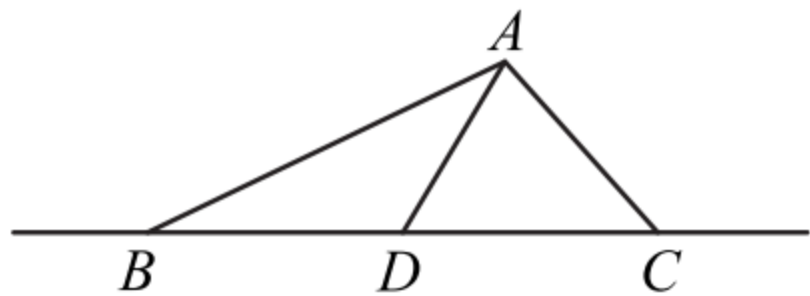
所以 $r(x) \leq r(e) = 0$, 从而 $\ln x - \frac{x}{e} \leq 0$, 故 $\ln x \leq \frac{x}{e}$, 取等条件是 $x = e$.

重要结论 6: (向量中线定理) 如图, 设 D 是 BC 中点, 则 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.



证明: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

重要结论 7: (三点共线向量系数和结论) 如图, 平面内 A, B, C 三点不共线, 点 D 满足 $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} (\lambda, \mu \in \mathbf{R})$, 则 B, C, D 三点共线的充要条件是 $\lambda + \mu = 1$.



证明: 先看充分性. 当 $\lambda + \mu = 1$ 时, $\mu = 1 - \lambda$,

所以 $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB} + (1 - \lambda)\overrightarrow{AC} = \lambda(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}$,

从而 $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$, 故 $\overrightarrow{CD} = \lambda\overrightarrow{CB}$, 所以 B, C, D 三点共线, 充分性成立;

再看必要性. 当 B, C, D 三点共线时, 可设 $\overrightarrow{BD} = m\overrightarrow{BC}$,

所以 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + m(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = (1 - m)\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}$,

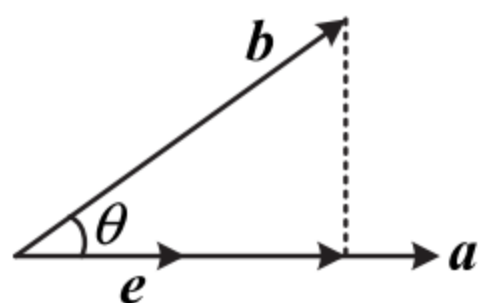
与 $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$ 对比可得 $\begin{cases} \lambda = 1 - m \\ \mu = m \end{cases}$, 所以 $\lambda + \mu = 1 - m + m = 1$, 必要性成立;

所以 B, C, D 三点共线的充要条件是 $\lambda + \mu = 1$.

重要结论 8: (投影向量计算公式) 向量 b 在向量 a 上的投影向量为 $\frac{a \cdot b}{|a|^2}a$.

证明: 如图, 设 e 为与 a 同向的单位向量, 则 b 在 a 上的投影向量为 $(|b|\cos\theta)e$,

由于 $e = \frac{a}{|a|}$, 所以 $(|b|\cos\theta)e = (|b|\cos\theta)\frac{a}{|a|} = \frac{|b|\cos\theta}{|a|}a = \frac{|a| \cdot |b|\cos\theta}{|a|^2}a = \frac{a \cdot b}{|a|^2}a$.



重要结论 9：（重心坐标） $\triangle ABC$ 的顶点分别为 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ， $C(x_3, y_3)$ ，则

$\triangle ABC$ 的重心 G 的坐标为 $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ 。这一结论可推广到空间中。

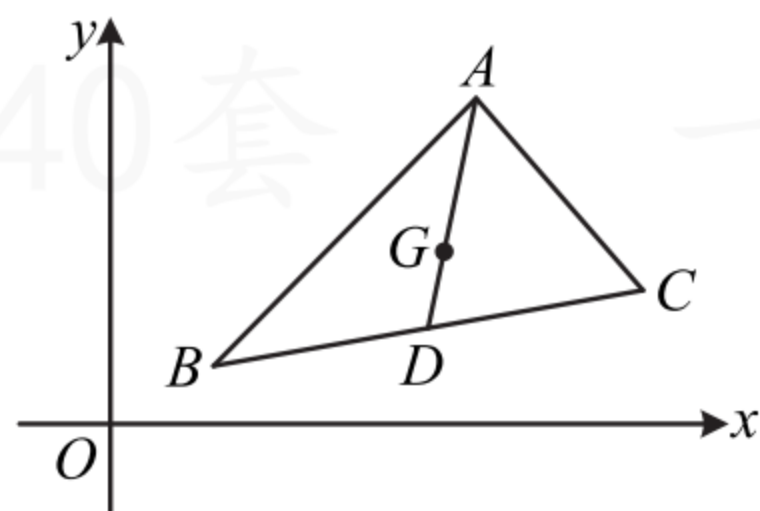
证明：如图，设 $G(x, y)$ 为 $\triangle ABC$ 的重心，则 $|AG|:|GD|=2:1$ ，

$$\text{所以 } \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \quad (\text{i}),$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AG} = (x - x_1, y - y_1), \quad \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1), \quad \overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1),$$

$$\text{所以由式(i)可得} \begin{cases} x - x_1 = \frac{1}{3}(x_2 - x_1 + x_3 - x_1) \\ y - y_1 = \frac{1}{3}(y_2 - y_1 + y_3 - y_1) \end{cases},$$

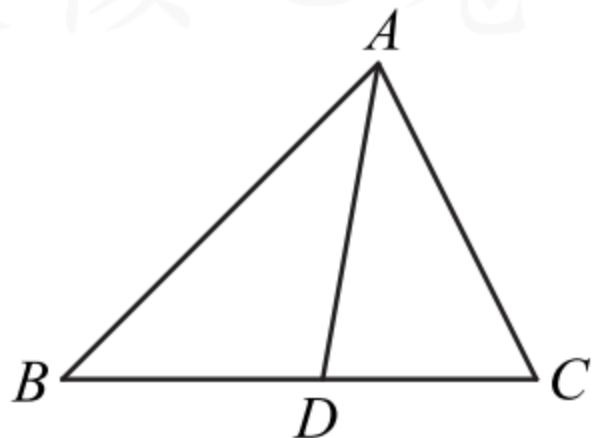
$$\text{整理得: } \begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \end{cases},$$



故重心 G 的坐标为 $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ 。

重要结论 10：（角平分线性质定理）如图， $\triangle ABC$ 的内角 A 的平分线与 BC 交于点

D ，则 $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ 。



证明：设 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的高为 h ，则 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2}BD \cdot h}{\frac{1}{2}CD \cdot h} = \frac{BD}{CD}$ (i)，

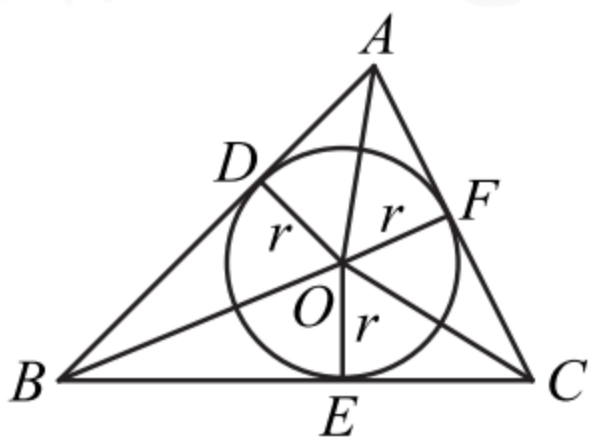
又 AD 是内角 A 的平分线，所以 $\angle BAD = \angle CAD$ ，

故 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD}{\frac{1}{2}AC \cdot AD \cdot \sin \angle CAD} = \frac{AB}{AC}$ ，结合式(i)可得 $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ 。

重要结论 11：（三角形的内切圆半径公式）设 $\triangle ABC$ 的面积为 S ，周长为 L ，内切圆半径为 r ，则 $r = \frac{2S}{L}$ 。

证明：如图，设切点分别为 D, E, F ，则 $OD \perp AB$ ， $OE \perp BC$ ， $OF \perp AC$ ，

所以 $S = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2}AB \cdot OD + \frac{1}{2}BC \cdot OE + \frac{1}{2}AC \cdot OF$
 $= \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}BC \cdot r + \frac{1}{2}AC \cdot r = \frac{1}{2}(AB + BC + AC)r = \frac{1}{2}Lr$ ，所以 $r = \frac{2S}{L}$ 。



重要结论 12：（等差、等比数列的片段和性质）

①若 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，其前 n 项和为 S_n ，则 S_m ， $S_{2m} - S_m$ ， $S_{3m} - S_{2m}$ ， $\dots$ 也构成等差数列，公差为 m^2d 。

②若 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，其前 n 项和为 S_n ，则当 $q \neq -1$ 或 m 为奇数时， S_m ， $S_{2m} - S_m$ ， $S_{3m} - S_{2m}$ ， $\dots$ 也构成等比数列，公比为 q^m 。

证明：① $S_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m$ ， $S_{2m} - S_m = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{2m}$ ，

因为 $a_{m+1} - a_1 = md$ ， $a_{m+2} - a_2 = md$ ， $\dots$ ， $a_{2m} - a_m = md$ ，

$$\text{所以 } (S_{2m} - S_m) - S_m = (a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{2m}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_m)$$

$$= (a_{m+1} - a_1) + (a_{m+2} - a_2) + \cdots + (a_{2m} - a_m) = md + md + \cdots + md = m^2 d,$$

$$\text{同理, } (S_{3m} - S_{2m}) - (S_{2m} - S_m) = (a_{2m+1} + a_{2m+2} + \cdots + a_{3m}) - (a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{2m})$$

$$= (a_{2m+1} - a_{m+1}) + (a_{2m+2} - a_{m+2}) + \cdots + (a_{3m} - a_{2m}) = md + md + \cdots + md = m^2 d,$$

以此类推, $S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}, \cdots$ 构成公差为 $m^2 d$ 的等差数列.

②当 $q \neq -1$ 或 m 为奇数时, $S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}, \cdots$ 均不为 0,

$$\text{且 } \frac{S_{2m} - S_m}{S_m} = \frac{a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{2m}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_m} = \frac{a_1 q^m + a_2 q^m + \cdots + a_m q^m}{a_1 + a_2 + \cdots + a_m} = q^m,$$

$$\frac{S_{3m} - S_{2m}}{S_{2m} - S_m} = \frac{a_{2m+1} + a_{2m+2} + \cdots + a_{3m}}{a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{2m}} = \frac{a_{m+1} q^m + a_{m+2} q^m + \cdots + a_{2m} q^m}{a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{2m}} = q^m,$$

以此类推, $S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}, \cdots$ 构成公比为 q^m 的等比数列.

重要结论 13: (n^2 求和结论) 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

证明: (i) 当 $n=1$ 时, $1^2 = \frac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6}$, 结论成立;

(ii) 假设当 $n=k(k \geq 1, k \in \mathbf{N}^*)$ 时, 结论也成立, 即 $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$,

$$\text{则当 } n=k+1 \text{ 时, } 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6}$$

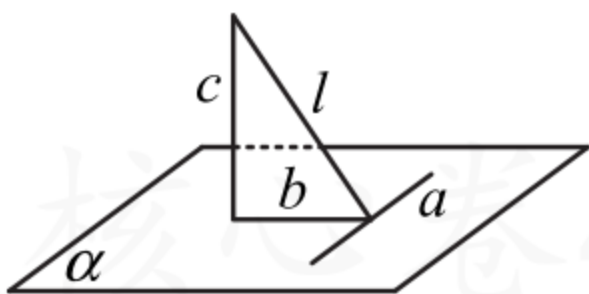
$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6},$$

所以当 $n=k+1$ 时, 结论也成立;

综合(i)(ii)可知 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立.

重要结论 14: (三垂线定理) 如图, $a \subset \alpha$, l 在 α 内的射影是 b , 若 $a \perp b$, 则 $a \perp l$, 此结论反过来也成立, 即当 $a \perp l$ 时, 也有 $a \perp b$.

证明: 因为 $\begin{cases} c \perp \alpha \\ a \subset \alpha \end{cases}$, 所以 $a \perp c$, 故 $a \perp b \Leftrightarrow a \perp$ 图中的三角形所在平面 $\Leftrightarrow a \perp l$.



重要结论 15: (椭圆通径公式) 对于椭圆, 过其焦点且垂直于长轴的弦叫做通径, 通径的长为 $\frac{2b^2}{a}$, 其中 a, b 分别为椭圆的长半轴长、短半轴长.

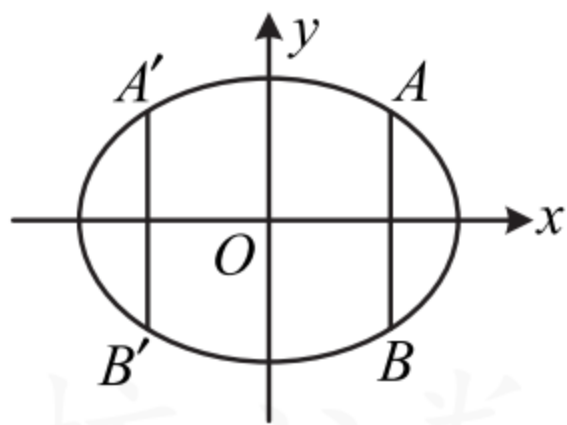
证明: 如图, 不妨设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 其焦点为 $(\pm c, 0)$,

过其焦点且与长轴垂直的直线的方程为 $x = c$ 或 $x = -c$, 以 $x = c$ 为例,

将 $x = c$ 代入 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 可得 $\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

解得: $y = \pm \sqrt{b^2 \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \right)} = \pm \sqrt{b^2 \cdot \frac{a^2 - c^2}{a^2}} = \pm \sqrt{\frac{b^4}{a^2}} = \pm \frac{b^2}{a}$,

所以图中通径长 $|AB| = \frac{2b^2}{a}$, 由椭圆的对称性可知通径 $A'B'$ 的长也为 $\frac{2b^2}{a}$.



重要结论 16: (双曲线通径公式) 对于双曲线, 过其焦点且垂直于实轴的弦叫做通径, 通径的长为 $\frac{2b^2}{a}$, 其中 a, b 分别为双曲线的实半轴长、虚半轴长.

证明：如图，不妨设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，其焦点为 $(\pm c, 0)$ ，

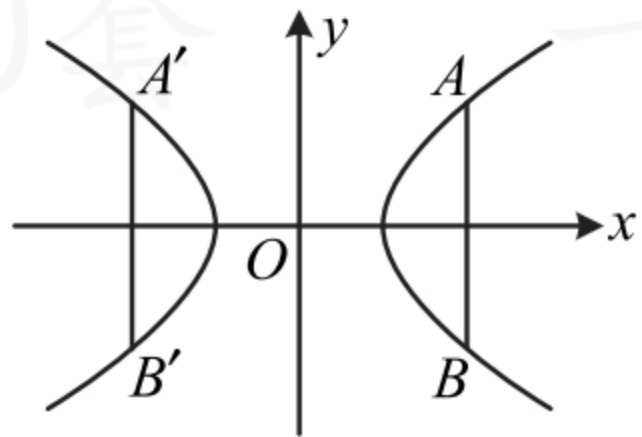
过其焦点且与实轴垂直的直线的方程为 $x = c$ 或 $x = -c$ ，以 $x = c$ 为例，

将 $x = c$ 代入 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 可得 $\frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，

解得： $y = \pm \sqrt{b^2 \left(\frac{c^2}{a^2} - 1 \right)} = \pm \sqrt{b^2 \cdot \frac{c^2 - a^2}{a^2}} = \pm \sqrt{\frac{b^4}{a^2}} = \pm \frac{b^2}{a}$ ，

所以图中通径长 $|AB| = \frac{2b^2}{a}$ ，

由双曲线的对称性可知通径 $A'B'$ 的长也为 $\frac{2b^2}{a}$ 。



重要结论 17：（韦达定理推论）设 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两

根，则 $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ 。

证明：由韦达定理， $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ ，所以 $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$

$$= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a}} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.$$

重要结论 18：（弦长公式）设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，

若 A, B 在直线 $y = kx + b$ 上，则 $|AB| = \sqrt{1 + k^2} \cdot |x_1 - x_2|$ ；

若 A, B 在直线 $x = my + t$ 上，则 $|AB| = \sqrt{1 + m^2} \cdot |y_1 - y_2|$ 。

特别地，当 A, B 是直线与椭圆（或双曲线、抛物线）交点时，常联立直线与椭圆（或双曲线、抛物线）的方程，得到关于 x 或 y 的一元二次方程，则上述弦长公式中的 $|x_1 - x_2|$ ， $|y_1 - y_2|$ 可由韦达定理推论来算。以 $|x_1 - x_2|$ 为例，假设联立直线与圆锥曲线

得到的一元二次方程是 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，则 $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ ，所以此时的弦长公

式可写成 $|AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$.

证明：由两点间的距离公式， $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (i)，

若 A, B 两点在直线 $y = kx + b$ 上，则 $\begin{cases} y_1 = kx_1 + b \\ y_2 = kx_2 + b \end{cases}$ ，

代入(i)得 $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (kx_1 + b - kx_2 - b)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + k^2(x_1 - x_2)^2}$
 $= \sqrt{(1+k^2)(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{1+k^2} \cdot |x_1 - x_2|$ ；

若 A, B 两点在直线 $x = my + t$ 上，则 $\begin{cases} x_1 = my_1 + t \\ x_2 = my_2 + t \end{cases}$ ，

代入(i)得 $|AB| = \sqrt{(my_1 + t - my_2 - t)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{m^2(y_1 - y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
 $= \sqrt{(m^2 + 1)(y_1 - y_2)^2} = \sqrt{1+m^2} \cdot |y_1 - y_2|$.

重要结论 19：双曲线的焦点到其渐近线的距离等于虚半轴长 b .

证明：不妨设双曲线为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，则该双曲线的渐近线为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，

即 $bx \pm ay = 0$ ，设双曲线的焦点为 $(\pm c, 0)$ ，

则焦点到渐近线的距离 $d = \frac{|\pm cb|}{\sqrt{b^2 + (\pm a)^2}} = \frac{cb}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{cb}{c} = b$.

重要结论 20：(椭圆、双曲线焦点三角形面积公式)

①如图 1，设 P 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上一点， $F_1(-c, 0)$ ， $F_2(c, 0)$ 分别是椭圆的左、右焦点， $\angle F_1PF_2 = \theta$ ，则 $S_{\triangle PF_1F_2} = b^2 \tan \frac{\theta}{2}$.

②如图 2，设 P 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上一点， $F_1(-c, 0)$ ， $F_2(c, 0)$ 分别是

双曲线的左、右焦点， $\angle F_1PF_2 = \theta$ ，则 $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{b^2}{\tan \frac{\theta}{2}}$ 。

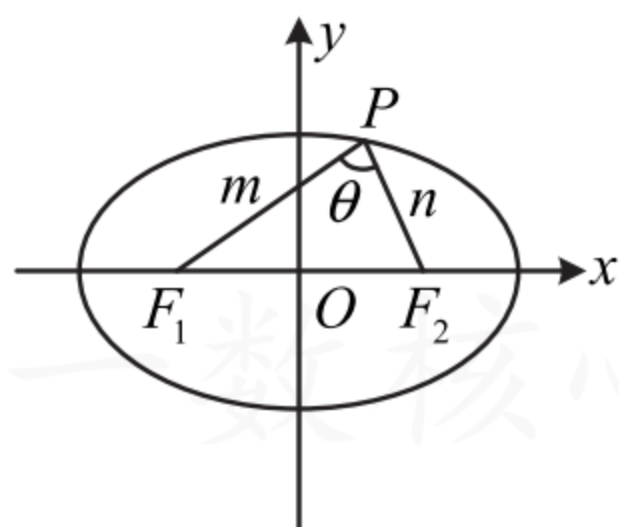


图1

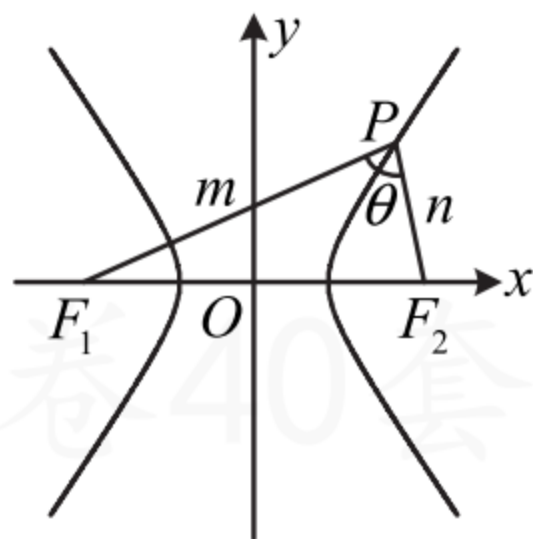


图2

证明：①记 $|PF_1| = m$ ， $|PF_2| = n$ ，则由椭圆定义， $m + n = 2a$ (i)，

在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由余弦定理， $|F_1F_2|^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| \cdot \cos \angle F_1PF_2$ ，

所以 $4c^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos \theta = (m + n)^2 - 2mn - 2mn \cos \theta$

$= (m + n)^2 - 2mn(1 + \cos \theta)$ (ii)，

将式(i)代入式(ii)得 $4c^2 = 4a^2 - 2mn(1 + \cos \theta)$ ，所以 $mn = \frac{4a^2 - 4c^2}{2(1 + \cos \theta)} = \frac{2b^2}{1 + \cos \theta}$ ，

故 $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2}mn \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{2b^2}{1 + \cos \theta} \cdot \sin \theta = b^2 \cdot \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = b^2 \cdot \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = b^2 \tan \frac{\theta}{2}$ 。

②记 $|PF_1| = m$ ， $|PF_2| = n$ ，则 $|m - n| = 2a$ (iii)，

在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由余弦定理， $|F_1F_2|^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| \cdot \cos \angle F_1PF_2$ ，

所以 $4c^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos \theta = (m - n)^2 + 2mn - 2mn \cos \theta$

$= (m - n)^2 + 2mn(1 - \cos \theta)$ (iv)，

将式(iii)代入式(iv)得 $4c^2 = 4a^2 + 2mn(1 - \cos \theta)$ ，所以 $mn = \frac{4c^2 - 4a^2}{2(1 - \cos \theta)} = \frac{2b^2}{1 - \cos \theta}$ ，

故 $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2}mn \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{2b^2}{1 - \cos \theta} \cdot \sin \theta = b^2 \cdot \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = b^2 \cdot \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{b^2}{\tan \frac{\theta}{2}}$ 。

重要结论 21: (切线、切点弦统一结论) 设点 $P(x_0, y_0)$, 将圆的标准方程 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 变成 $(x-a)(x_0-a) + (y-b)(y_0-b) = r^2$, 或在圆的一般式方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 中, 用 x_0x 替换 x^2 , 用 y_0y 替换 y^2 , 用 $\frac{x+x_0}{2}$ 替换 x , 用 $\frac{y+y_0}{2}$ 替换 y , 可以得到一个新方程, 当 P 在圆上时, 如图 1, 该方程表示切线 l ; 当 P 在圆外时, 如图 2, 该方程表示切点弦 AB 所在直线的方程. 本结论对椭圆、双曲线、抛物线也成立.

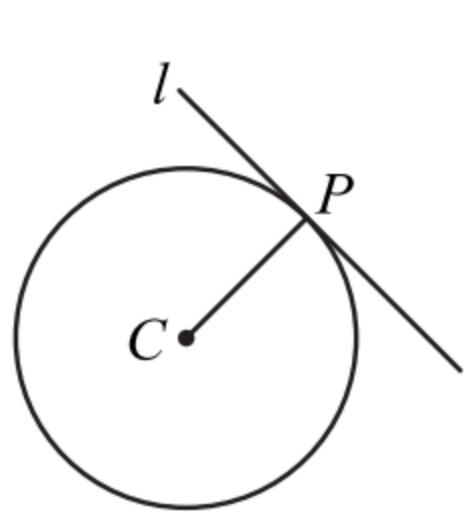


图1

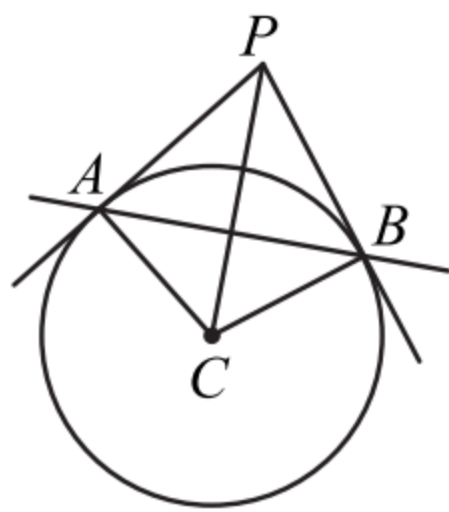


图2

证明: 按圆、椭圆、双曲线、抛物线逐一论证上述统一结论较繁琐, 下面我们只证圆的切点弦方程. 如下图, 因为 PA, PB 是圆的切线, 所以 $PA \perp AC, PB \perp BC$, 故 P, A, C, B 四点都在以 PC 为直径的圆上, AB 即为该圆与圆 C 的公共弦,

由 $P(x_0, y_0), C(a, b)$ 可得 PC 中点为 $\left(\frac{x_0+a}{2}, \frac{y_0+b}{2}\right)$,

$|PC|^2 = (x_0-a)^2 + (y_0-b)^2$, 故以 PC 为直径的圆的方程为

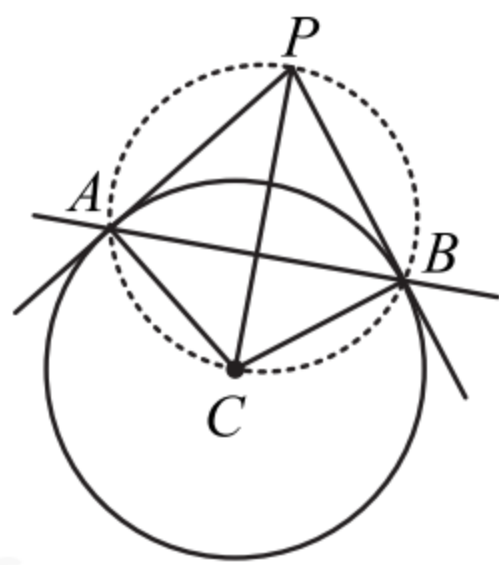
$$\left(x - \frac{x_0+a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_0+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}[(x_0-a)^2 + (y_0-b)^2],$$

展开整理得: $x^2 + y^2 - (x_0+a)x - (y_0+b)y + ax_0 + by_0 = 0$ (i),

圆 C 的方程为 $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 = r^2$ (ii),

用方程(ii)减去方程(i)可得 $(x_0-a)x + (y_0-b)y - ax_0 - by_0 + a^2 + b^2 = r^2$,

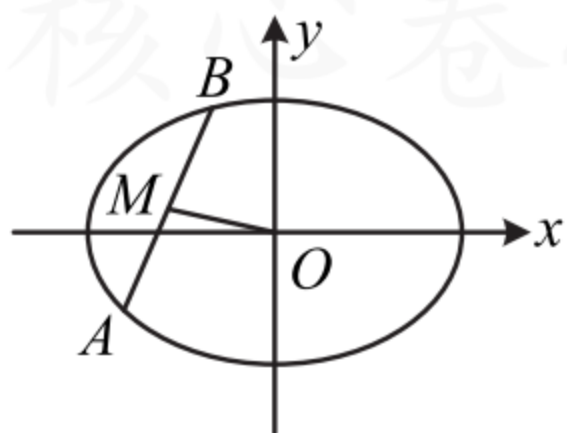
整理得直线 AB 的方程为 $(x_0-a)(x-a) + (y_0-b)(y-b) = r^2$.



重要结论 22：（椭圆的中点弦斜率积结论）如图， AB 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的

一条不与坐标轴垂直且不过原点的弦， M 为 AB 中点，则 $k_{AB} \cdot k_{OM} = -\frac{b^2}{a^2}$.

注：对于焦点在 y 轴上的椭圆 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，则上述斜率积为 $-\frac{a^2}{b^2}$.



证明： 设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ， $x_1 \neq x_2$ ， $y_1 \neq y_2$ ，

因为 A, B 都在椭圆上，所以
$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \end{cases},$$

两式作差得： $\frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0$ ，整理得： $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = -\frac{b^2}{a^2}$ (i)，

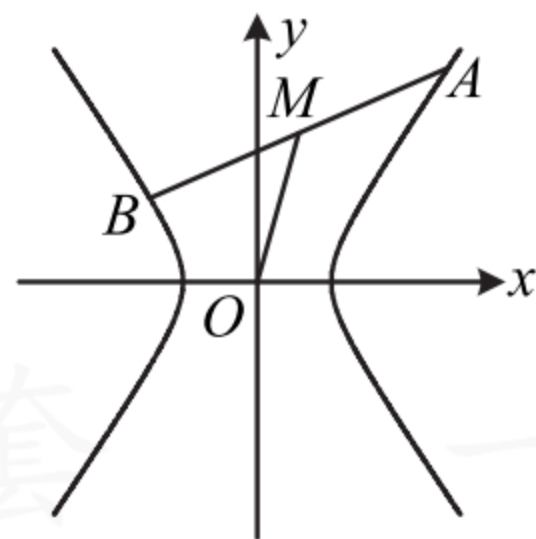
注意到 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = k_{AB}$ ， $\frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{2y_M}{2x_M} = \frac{y_M}{x_M} = k_{OM}$ ，所以式(i)即为 $k_{AB} \cdot k_{OM} = -\frac{b^2}{a^2}$ ，

对于焦点在 y 轴上的情形，证法与上面相同，不再赘述.

重要结论 23：（双曲线的中点弦斜率积结论）

如图， AB 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条不与坐标

轴垂直且不过原点的弦， M 为 AB 中点，则 $k_{AB} \cdot k_{OM} = \frac{b^2}{a^2}$.



注：对于焦点在 y 轴上的双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，则上述斜率积为 $\frac{a^2}{b^2}$.

证明： 设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ， $x_1 \neq x_2$ ， $y_1 \neq y_2$ ，

因为 A, B 都在双曲线上, 所以
$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \end{cases},$$

两式作差得: $\frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} - \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0$, 整理得: $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{b^2}{a^2}$ (i),

注意到 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = k_{AB}$, $\frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{2y_M}{2x_M} = \frac{y_M}{x_M} = k_{OM}$, 所以式(i)即为 $k_{AB} \cdot k_{OM} = \frac{b^2}{a^2}$,

对于焦点在 y 轴上的情形, 证法与上面相同, 不再赘述.

重要结论 24: (平均数、方差的性质) 设数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数为 $\bar{x}$, 方差为 s^2 , 标准差为 s , 则数据 $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$ 的平均数为 $a\bar{x} + b$, 方差为 a^2s^2 , 标准差为 $|a|s$.

证明: 由题意, $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$, $s^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \bar{y} &= \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} = \frac{ax_1 + b + ax_2 + b + \dots + ax_n + b}{n} \\ &= \frac{a(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + nb}{n} = a \cdot \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + b = a\bar{x} + b, \end{aligned}$$

$$\text{故新数据的方差 } s_1^2 = \frac{1}{n}[(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \dots + (y_n - \bar{y})^2]$$

$$= \frac{1}{n}[(ax_1 + b - a\bar{x} - b)^2 + (ax_2 + b - a\bar{x} - b)^2 + \dots + (ax_n + b - a\bar{x} - b)^2]$$

$$= \frac{1}{n}[a^2(x_1 - \bar{x})^2 + a^2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + a^2(x_n - \bar{x})^2]$$

$$= a^2 \cdot \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2] = a^2s^2, \text{ 标准差 } s_1 = \sqrt{a^2s^2} = |a|s.$$

重要结论 25：（期望、方差的性质）设随机变量 X 的期望为 $E(X)$ ，方差为 $D(X)$ ，标准差为 $\sqrt{D(X)}$ ，若 $Y = aX + b$ ，则 Y 的期望 $E(Y) = aE(X) + b$ ，方差 $D(Y) = a^2 D(X)$ ，标准差为 $|a|\sqrt{D(X)}$ 。

证明： 设 X 的分布列为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

则 $E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$ (i)，

$D(X) = [x_1 - E(X)]^2 p_1 + [x_2 - E(X)]^2 p_2 + \cdots + [x_n - E(X)]^2 p_n$ (ii)，

因为 $Y = aX + b$ ，所以 Y 的分布列为

Y	$ax_1 + b$	$ax_2 + b$	$\cdots$	$ax_n + b$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

故 $E(Y) = (ax_1 + b)p_1 + (ax_2 + b)p_2 + \cdots + (ax_n + b)p_n$

$= a(x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n) + b(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)$ (iii)，

将式(i)和 $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ 代入式(iii)可得 $E(Y) = aE(X) + b$ ，

$D(Y) = [ax_1 + b - E(Y)]^2 p_1 + [ax_2 + b - E(Y)]^2 p_2 + \cdots + [ax_n + b - E(Y)]^2 p_n$

$= [ax_1 + b - aE(X) - b]^2 p_1 + [ax_2 + b - aE(X) - b]^2 p_2 + \cdots + [ax_n + b - aE(X) - b]^2 p_n$

$= a^2 [x_1 - E(X)]^2 p_1 + a^2 [x_2 - E(X)]^2 p_2 + \cdots + a^2 [x_n - E(X)]^2 p_n$

$= a^2 \{ [x_1 - E(X)]^2 p_1 + [x_2 - E(X)]^2 p_2 + \cdots + [x_n - E(X)]^2 p_n \} = a^2 D(X)$ ，

随机变量 Y 的标准差为 $\sqrt{D(Y)} = \sqrt{a^2 D(X)} = |a|\sqrt{D(X)}$ 。

重要结论 26：（超几何分布期望公式）设随机变量 X 服从超几何分布，三个参数分别为 N ， n ， M ，则 $E(X) = n \cdot \frac{M}{N}$ 。

二级结论 27: (复数模的乘除法结论) 设 z_1, z_2 为复数, 则 $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

证明: 设 $z_1 = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$, $z_2 = c + di (c, d \in \mathbf{R})$, 则

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |(a + bi)(c + di)| = |ac + adi + bci + bdi^2| = |ac - bd + (ad + bc)i| \\ &= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} = \sqrt{a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2acbd + a^2 d^2 + b^2 c^2 + 2adbc} \\ &= \sqrt{a^2 c^2 + b^2 d^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = |z_1| \cdot |z_2|; \\ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \left| z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \right| = |z_1| \cdot \left| \frac{1}{z_2} \right| = |z_1| \cdot \left| \frac{1}{c + di} \right| = |z_1| \cdot \left| \frac{c - di}{(c + di)(c - di)} \right| = |z_1| \cdot \left| \frac{c - di}{c^2 + d^2} \right| \\ &= |z_1| \cdot \sqrt{\left(\frac{c}{c^2 + d^2} \right)^2 + \left(-\frac{d}{c^2 + d^2} \right)^2} = |z_1| \cdot \frac{1}{\sqrt{c^2 + d^2}} = |z_1| \cdot \frac{1}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}. \end{aligned}$$

二级结论 28: (糖水不等式) 设 $a > b > 0$, $c > 0$, 则 $\frac{b+c}{a+c} > \frac{b}{a}$.

证明: $\frac{b+c}{a+c} - \frac{b}{a} = \frac{(b+c)a - (a+c)b}{(a+c)a} = \frac{c(a-b)}{(a+c)a} \quad (\text{i}),$

因为 $a > b > 0$, $c > 0$, 所以 $(a+c)a > 0$, $a-b > 0$,

结合(i)可得 $\frac{b+c}{a+c} - \frac{b}{a} > 0$, 故 $\frac{b+c}{a+c} > \frac{b}{a}$.

二级结论 29: (三元均值不等式) 设 a, b, c 为正实数, 则 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, 当且仅当

当 $a = b = c$ 时取等号. 此不等式可变形为 $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3$.

二级结论 30: (权方和不等式) 设 x, y 均为正数, 则 $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$, 当且仅当

$\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ 时取等号.

证明: $\left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \right)(x+y) = a^2 + \frac{y}{x}a^2 + \frac{x}{y}b^2 + b^2 = a^2 + b^2 + \frac{y}{x}a^2 + \frac{x}{y}b^2$

$$\geq a^2 + b^2 + 2\sqrt{\frac{y}{x}a^2 \cdot \frac{x}{y}b^2} = a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2b^2} = a^2 + b^2 + 2|ab| \geq a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2,$$

两端同除以 $x+y$ 得 $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y},$

取等条件是 $\frac{y}{x}a^2 = \frac{x}{y}b^2$ 且 a, b 同号, 结合 x, y 均为正数可得 $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}.$

二级结论 31: (端点效应) 假设题干给出含有参数 a 的不等式 $f(x) \geq 0$ 在 $x \in [m, n]$ 时恒成立, 让求参数 a 的取值范围, 若 $f(x)$ 恰好满足 $f(m) = 0$, 则称该不等式具有端点效应. 我们可以用端点来寻找使得 $f(x) \geq 0$ 恒成立的必要条件, 既然 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 且 $f(m) = 0$, 那么 $f(x)$ 在 $x = m$ 右侧附近函数值不能减少, 所以 $f'(m) \geq 0$, 由此解出 a 的范围即为 $f(x) \geq 0$ 成立的必要条件 (不一定是充分条件). 有时也会遇到 $f'(m)$ 恒为 0 的情况, 此时再按 $f''(m) \geq 0$ 考虑即可, 以此类推.

二级结论 32: (常用泰勒公式) ① $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots;$

② $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + \cdots;$

③ $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + \cdots;$

④ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots;$

⑤ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots.$

二级结论 33: (万能公式) 设 $\alpha \neq 2k\pi + \pi$ 且 $\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, 其中 $k \in \mathbf{Z}$, 则

① $\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}};$ ② $\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}};$ ③ $\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}.$

证明：① $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}};$

② $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}};$

③ $\tan \alpha = \tan(2 \times \frac{\alpha}{2}) = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}.$

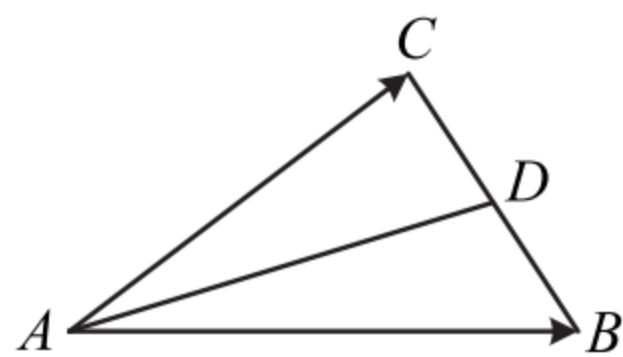
二级结论 34：（极化恒等式）如图，设 D 为 BC 中

点，则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AD}|^2 - |\overrightarrow{BD}|^2$.

证明： $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}),$

因为 $\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{DB}$ ，所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DB}) = |\overrightarrow{AD}|^2 - |\overrightarrow{BD}|^2,$

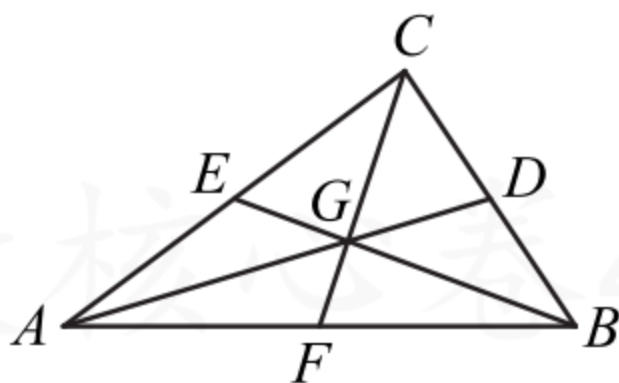
此结论虽然归为了二级结论，但针对性较强（涉及中线或底边中点的数量积问题），推荐掌握.



二级结论 35：（重心等分面积结论）设 $\triangle ABC$ 的重心为 G ，则 $S_{\triangle GAB} = S_{\triangle GAC} = S_{\triangle GBC}.$

证明：如图，因为 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，所以 D, E, F 分别为所在边的中点，

且 $AG:GD = BG:GE = CG:GF = 2:1$ ，考虑 $\triangle GAB$ 和 $\triangle GBD$ 的面积，



若都以 B 为顶点，则它们的高相等，设为 h ，则 $\frac{S_{\triangle GAB}}{S_{\triangle GBD}} = \frac{\frac{1}{2} AG \cdot h}{\frac{1}{2} GD \cdot h} = \frac{AG}{GD} = 2,$

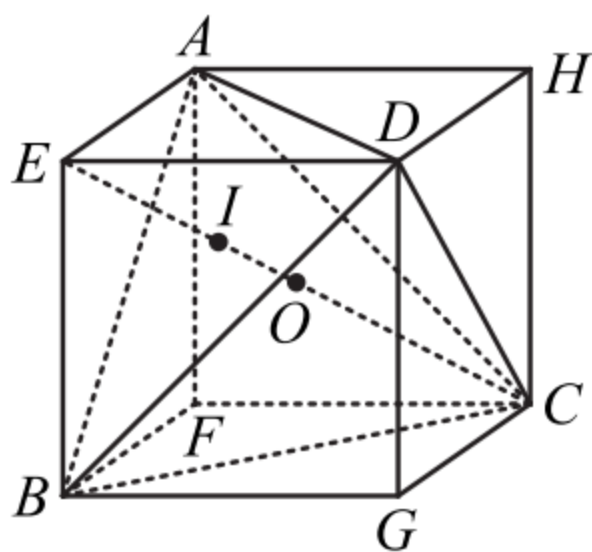
所以 $S_{\triangle GAB} = \frac{2}{3}S_{\triangle ABD}$ ，又 D 为 BC 中点，所以 $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$ ，

从而 $S_{\triangle GAB} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$ ，同理， $S_{\triangle GAC} = S_{\triangle GBC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$ ，故结论成立。

二级结论 36：（正四面体外接球、内切球半径）设正四面体的棱长为 a ，则其外接球

半径 $R = \frac{\sqrt{6}}{4}a$ ，内切球半径 $r = \frac{\sqrt{6}}{12}a$ 。

证明：如图，将正四面体放入正方体中，二者有相同的外接球，



由正四面体的棱长为 a 可得正方体的棱长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ ，

所以正方体的外接球半径 $R = \frac{\sqrt{2}}{2}a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}a$ ，

故正四面体的外接球半径 $R = \frac{\sqrt{6}}{4}a$ ，

内切球半径 r 即为球心 O 到正四面体的面的距离，如图，球心 O 为正方体的中心，即 CE 的中点，由图可知 CE 在面 $AEBF$ 内的射影是 EF ，

因为 $AB \perp EF$ ，所以由三垂线定理， $AB \perp CE$ ，

又 CE 在面 $BGDE$ 内的射影为 EG ，且 $BD \perp EG$ ，所以由三垂线定理， $BD \perp CE$ ，故 $CE \perp$ 平面 ABD ，设 OE 与平面 ABD 交于点 I ，

则点 O 到平面 ABD 的距离 $OI = OE - IE = \frac{1}{2}CE - IE = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}a - IE = \frac{\sqrt{6}}{4}a - IE$ (i)，

由三棱锥的等体积性， $V_{E-ABD} = V_{A-EBD}$ ，

所以 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times IE = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}a$, 解得: $IE = \frac{\sqrt{6}}{6}a$,

代入(i)得 $OI = \frac{\sqrt{6}}{4}a - \frac{\sqrt{6}}{6}a = \frac{\sqrt{6}}{12}a$, 所以正四面体的内切球半径 $r = \frac{\sqrt{6}}{12}a$.

二级结论 37: (椭圆、双曲线的焦半径公式)

①设 $P(x_0, y_0)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上任意一点, F_1, F_2 分别是椭圆的左、右焦点, 则 $|PF_1| = a + ex_0$, $|PF_2| = a - ex_0$, 其中 e 为椭圆的离心率.

②设 $P(x_0, y_0)$ 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上任意一点, F_1, F_2 分别是双曲线的左、右焦点, 则 $|PF_1| = |ex_0 + a|$, $|PF_2| = |ex_0 - a|$, 其中 e 为双曲线的离心率.

证明: ①设 $F_1(-c, 0)$, 则 $|PF_1| = \sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2} = \sqrt{x_0^2 + 2cx_0 + c^2 + y_0^2}$ (i),

因为 P 在椭圆上, 所以 $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, 故 $y_0^2 = b^2 \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right) = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x_0^2$,

$$\begin{aligned} \text{代入(i)得 } |PF_1| &= \sqrt{x_0^2 + 2cx_0 + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x_0^2} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}x_0^2 + 2cx_0 + c^2 + b^2} \\ &= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x_0^2 + 2cx_0 + a^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}x_0 + a\right)^2} = \left|\frac{c}{a}x_0 + a\right| = |ex_0 + a|, \end{aligned}$$

因为 $0 < e < 1$, $-a \leq x_0 \leq a$, 所以 $ex_0 + a > 0$, 故 $|PF_1| = ex_0 + a = a + ex_0$,

同理可证 $|PF_2| = a - ex_0$.

②设 $F_1(-c, 0)$, 则 $|PF_1| = \sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2} = \sqrt{x_0^2 + 2cx_0 + c^2 + y_0^2}$ (i),

因为 P 在双曲线上, 所以 $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, 故 $y_0^2 = b^2 \left(\frac{x_0^2}{a^2} - 1\right) = \frac{b^2}{a^2}x_0^2 - b^2$,

$$\text{代入(i)得 } |PF_1| = \sqrt{x_0^2 + 2cx_0 + c^2 + \frac{b^2}{a^2}x_0^2 - b^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}x_0^2 + 2cx_0 + c^2 - b^2}$$

$$= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x_0^2 + 2cx_0 + a^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}x_0 + a\right)^2} = \left|\frac{c}{a}x_0 + a\right| = |ex_0 + a|, \text{ 同理可证 } |PF_2| = |ex_0 - a|.$$

二级结论 38: (角版焦半径、焦点弦公式, 焦原三角形面积公式)

设抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , O 为原点.

①焦半径公式: 如图 1, 设 A 为抛物线上任意一点, 记 $\angle AFO = \alpha$, 则焦半径

$$|AF| = \frac{p}{1 + \cos \alpha}.$$

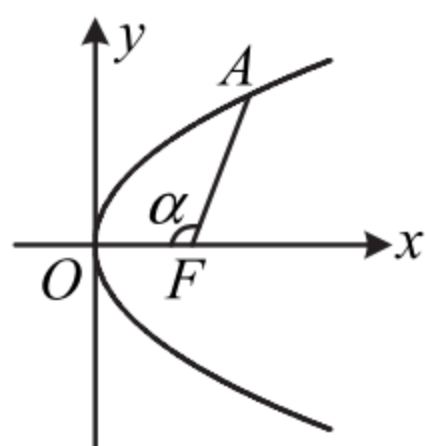


图1

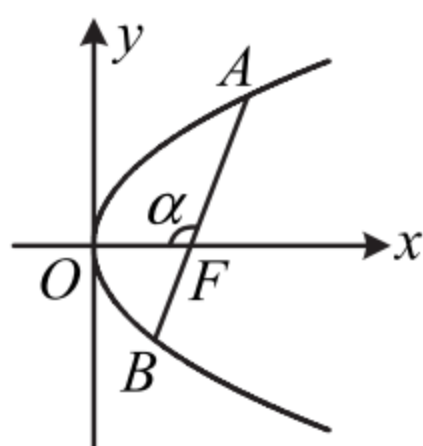


图2

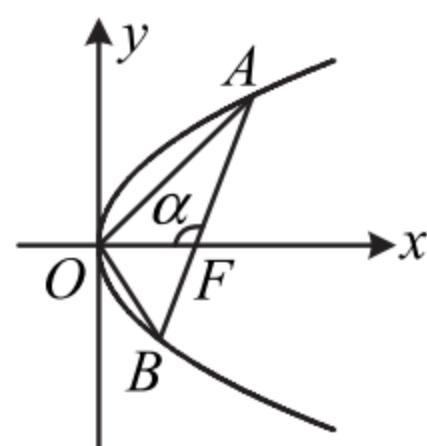


图3

②焦点弦公式: 如图 2, AB 是抛物线的焦点弦, 记 $\angle AFO = \alpha$, 则 $|AB| = \frac{2p}{\sin^2 \alpha}$.

③焦原三角形面积公式: 如图 3, 设 AB 是抛物线的焦点弦, 记 $\angle AFO = \alpha$, 则

$$S_{\triangle AOB} = \frac{p^2}{2 \sin \alpha}.$$

证明: ①作 $AM \perp x$ 轴于 M , 先考虑 M 在 F 右侧的情形, 如图 4,

设 $A(x_0, y_0)$, 则 $|FM| = x_0 - \frac{p}{2}$,

又 $|FM| = |AF| \cos \angle AFM = |AF| \cos(\pi - \alpha) = -|AF| \cos \alpha$,

与上式比较可得: $-|AF| \cos \alpha = x_0 - \frac{p}{2}$,

另一方面, 由坐标版焦半径公式知 $|AF| = x_0 + \frac{p}{2}$,

与上式作差消去 x_0 整理得: $|AF| = \frac{p}{1 + \cos \alpha}$;

同理可证当 M 在 F 左侧或恰好与 F 重合时, 都有 $|AF| = \frac{p}{1 + \cos \alpha}$.

②如图 5, $\angle BFO = \pi - \alpha$, 由①中的焦半径公式可得 $|AF| = \frac{p}{1 + \cos \alpha}$,

$$|BF| = \frac{p}{1 + \cos(\pi - \alpha)} = \frac{p}{1 - \cos \alpha}, \text{ 所以 } |AB| = |AF| + |BF| = \frac{p}{1 + \cos \alpha} + \frac{p}{1 - \cos \alpha}$$

$$= \frac{p(1 - \cos \alpha) + p(1 + \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)} = \frac{2p}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2p}{\sin^2 \alpha}.$$

③如图 6, 作 $OD \perp AB$ 于 D , 则 $|OD| = |OF| \sin \angle OFD$

$$= |OF| \sin(\pi - \alpha) = |OF| \sin \alpha = \frac{p}{2} \cdot \sin \alpha, \text{ 由②中的焦点弦公式可得 } |AB| = \frac{2p}{\sin^2 \alpha},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |AB| \cdot |OD| = \frac{1}{2} \cdot \frac{2p}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{p}{2} \cdot \sin \alpha = \frac{p^2}{2 \sin \alpha}.$$

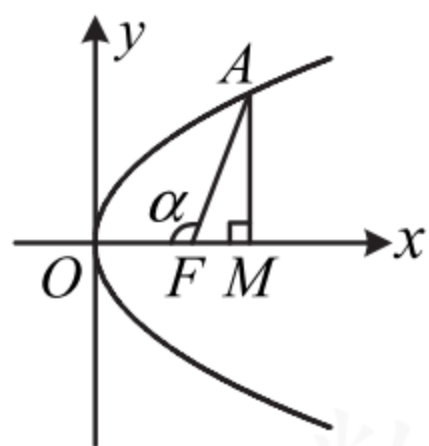


图4

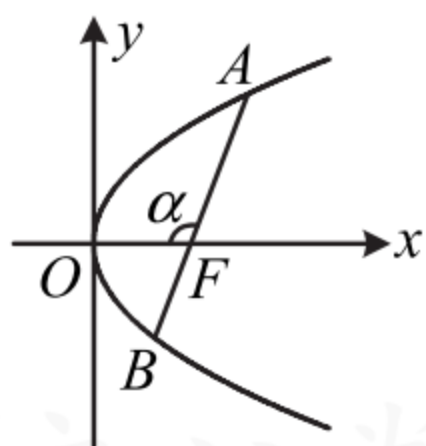


图5

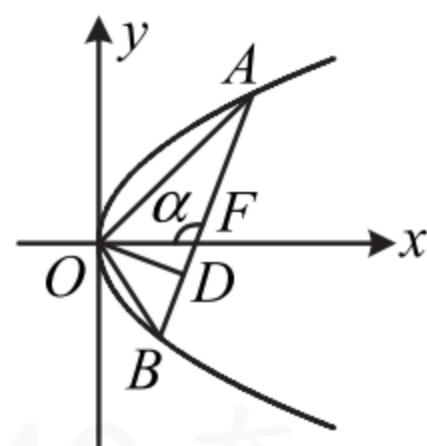


图6

二级结论 39: (原点三角形面积公式) 设 O 为原点, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $S_{\triangle AOB} =$

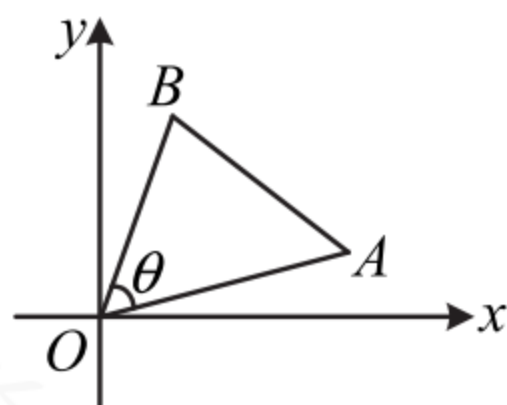
$$\frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|.$$

证明: 如图, 设 $\angle AOB = \theta$, 则 $\cos \theta = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|}$,

$$\text{所以 } S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|} \right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 \cdot |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \sqrt{x_1^2 x_2^2 + x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 - (x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2)} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2} = \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|.
 \end{aligned}$$

二级结论 40：（椭圆的第三定义斜率积结论）如图 1，设 A, B 分别是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} =$

$1(a > b > 0)$ 的左、右顶点， P 是椭圆上不与 A, B 重合的任意一点，则 $k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{b^2}{a^2}$ 。

注：①上述结论中 A, B 是椭圆的左、右顶点，可将其推广为椭圆上关于原点对称的

任意两点，如图 2，只要直线 PA, PB 的斜率都存在，就仍然满足 $k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{b^2}{a^2}$ 。

②若是焦点在 y 轴上的椭圆 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ ，则上述斜率积为 $-\frac{a^2}{b^2}$ 。

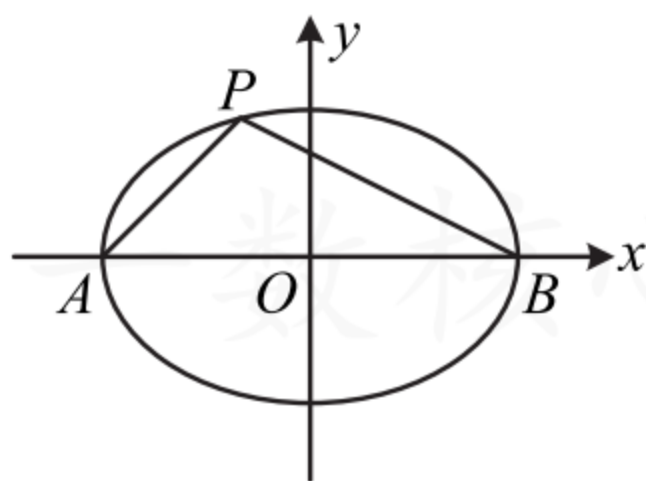


图1

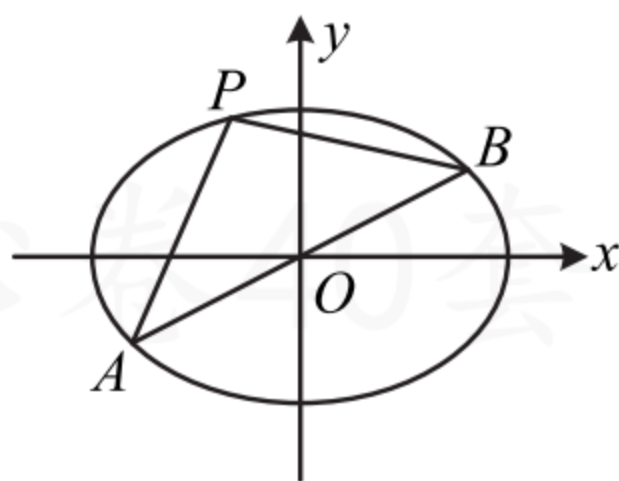


图2

证明：图 1 是图 2 的特殊情况，故下面只证图 2 的一般性结论，

$$\text{设 } A(x_1, y_1), P(x_2, y_2), \text{ 则 } B(-x_1, -y_1), k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1} = \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_2^2 - x_1^2} \quad (\text{i}),$$

$$\text{因为点 } A \text{ 在椭圆上, 所以 } \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \text{ 故 } y_1^2 = b^2(1 - \frac{x_1^2}{a^2}) = -\frac{b^2}{a^2}(x_1^2 - a^2),$$

$$\text{同理 } y_2^2 = -\frac{b^2}{a^2}(x_2^2 - a^2), \text{ 所以 } y_2^2 - y_1^2 = -\frac{b^2}{a^2}(x_2^2 - a^2 - x_1^2 + a^2) = -\frac{b^2}{a^2}(x_2^2 - x_1^2),$$

$$\text{代入(i)得: } k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{b^2}{a^2};$$

在上述条件中令 $A(-a, 0), B(a, 0)$ ，即得图 1 的特殊情况下的结论，

对于焦点在 y 轴上的情形，证法与上面相同，不再赘述。

此结论虽然归为了二级结论，但针对性较强（涉及椭圆上的点 P 与椭圆上关于原点对称的 A, B 两点的连线斜率积问题），推荐掌握。

二级结论 41：（双曲线第三定义斜率积结论）如图 1，设 A, B 分别是双曲线

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右顶点， P 是双曲线上不与 A, B 重合的任意一点，则

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{b^2}{a^2}.$$

注：①上述结论中 A, B 是双曲线的左、右顶点，可将其推广为双曲线上关于原点对称的任意两点，如图 2，只要直线 PA, PB 的斜率都存在，就仍满足 $k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{b^2}{a^2}$ 。

②若是焦点在 y 轴上的双曲线，则上述斜率积为 $\frac{a^2}{b^2}$ 。

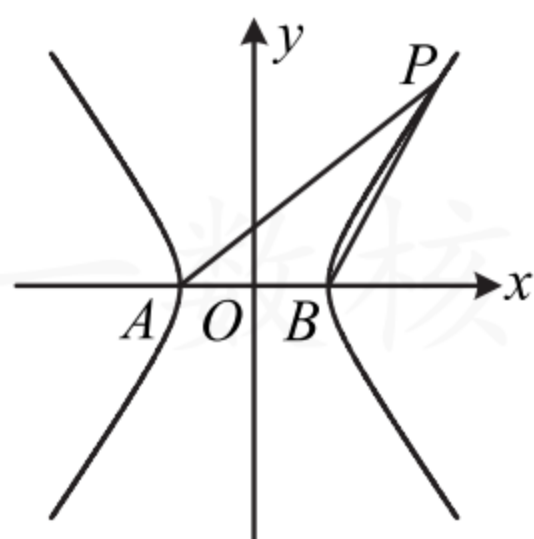


图1

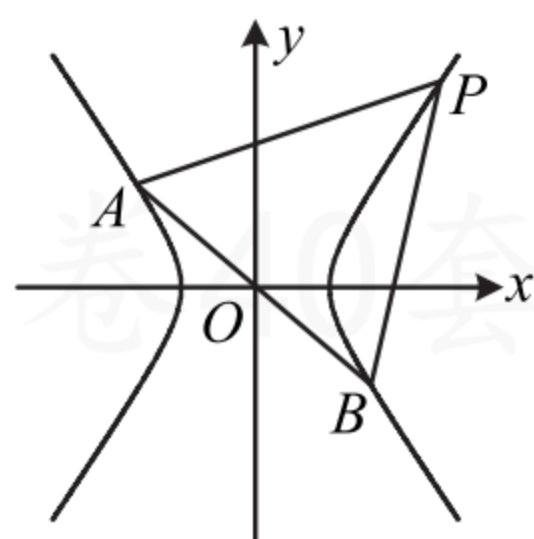


图2

证明：图 1 是图 2 的特殊情况，故下面只证图 2 的一般性结论，

$$\text{设 } A(x_1, y_1), P(x_2, y_2), \text{ 则 } B(-x_1, -y_1), k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1} = \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_2^2 - x_1^2} \quad (\text{i}),$$

$$\text{因为点 } A \text{ 在双曲线上, 所以 } \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \text{ 故 } y_1^2 = b^2 \left(\frac{x_1^2}{a^2} - 1 \right) = \frac{b^2}{a^2} (x_1^2 - a^2),$$

$$\text{同理, } y_2^2 = \frac{b^2}{a^2} (x_2^2 - a^2), \text{ 所以 } y_2^2 - y_1^2 = \frac{b^2}{a^2} (x_2^2 - a^2 - x_1^2 + a^2) = \frac{b^2}{a^2} (x_2^2 - x_1^2),$$

$$\text{代入(i)得: } k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{b^2}{a^2};$$

在上述条件中令 $A(-a, 0), B(a, 0)$ ，即得图 1 的特殊情况下的结论，

对于焦点在 y 轴上的情形，证法与上面相同，不再赘述。

此结论虽然归为了二级结论，但针对性较强（涉及双曲线上的点 P 与双曲线上关于原点对称的 A, B 两点的连线斜率积问题），推荐掌握。

二级结论 42：（抛物线的垂直定点结论）设 A, B 为抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上两点， O 为原点，若 $OA \perp OB$ ，则直线 AB 过定点 $M(2p, 0)$ 。

证明： 设直线 AB 的方程为 $x = my + t$ ，设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，

因为 $OA \perp OB$ ，所以 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ (i)，

联立 $\begin{cases} x = my + t \\ y^2 = 2px \end{cases}$ 消去 x 整理得： $y^2 - 2pmy - 2pt = 0$ (ii)，

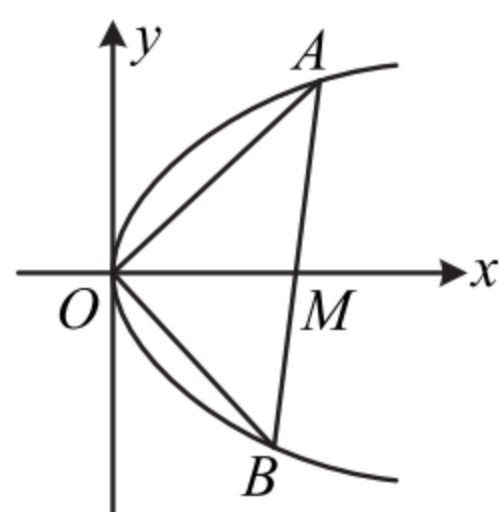
由韦达定理， $y_1y_2 = -2pt$ ，所以 $x_1x_2 = \frac{y_1^2}{2p} \cdot \frac{y_2^2}{2p} = \left(\frac{y_1y_2}{2p}\right)^2 = t^2$ ，

代入(i)得 $t^2 - 2pt = 0$ ，所以 $t = 0$ 或 $2p$ ，

当 $t = 0$ 时， A, B 中有一个与原点重合，

不合题意，所以 $t = 2p$ ，经检验，满足方程(ii)的判别式 $\Delta > 0$ ，

从而直线 AB 的方程为 $x = my + 2p$ ，故直线 AB 过定点 $M(2p, 0)$ 。



二级结论 43：以抛物线的焦点弦为直径的圆与准线相切。

证明： 设以 AB 为直径的圆的圆心为 AB 中点 P ，半径为 r ，则 $r = \frac{1}{2}|AB|$ ，

如图，作 $AM \perp$ 准线 l 于点 M ， $BN \perp l$ 于点 N ，

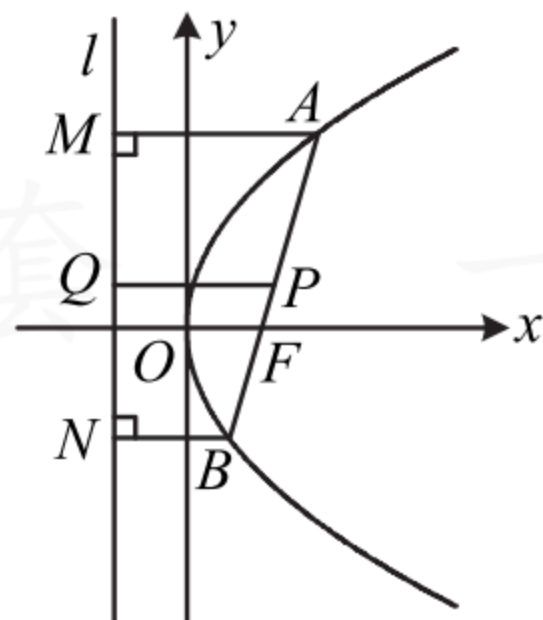
$PQ \perp l$ 于点 Q ，

则由抛物线定义， $|AM| = |AF|$ ， $|BN| = |BF|$ ，

所以 $|PQ| = \frac{1}{2}(|AM| + |BN|) = \frac{1}{2}(|AF| + |BF|) = \frac{1}{2}|AB|$ ，

这说明点 P 到准线的距离等于 r ，

故准线与以 AB 为直径的圆相切。



二级结论 44：（点乘双根法）若将直线与圆锥曲线方程联立，得到关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，设该方程的两根为 x_1, x_2 ，现在要算 $(x_1 - t)(x_2 - t)$ ，将其展开为 $x_1x_2 - t(x_1 + x_2) + t^2$ ，结合韦达定理来算可行，但有时这样做计算量较大，更简单的方法是根据 x_1, x_2 是该方程的两根，将该方程左侧的 $ax^2 + bx + c$ 化为两根式，得到 $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ ，观察发现在两端同时令 $x = t$ ，即可得到 $at^2 + bt + c = a(t - x_1)(t - x_2)$ ，从而 $(x_1 - t)(x_2 - t) = \frac{at^2 + bt + c}{a}$ ，这样就快速求出了目标量 $(x_1 - t)(x_2 - t)$ ，此法叫做“点乘双根法”。